де $\vec{E}_{0i}$ t – амплітуда (tg-складові) (пост. величини)

Умова (1) повинна виконуватись в будь-який момент часу t та для всіх точок $\vec{r}$, які лежать на межі розділу. Звідси витікає, що

(2) $\begin{cases} \omega t - \vec{k}_1\vec{r} = \omega t - \vec{k}_2\vec{r} = \omega t - \vec{k}_3\vec{r}, \text{ а також} \\ \vec{k}_1\vec{r} = \vec{k}_2\vec{r} = \vec{k}_3\vec{r} \text{ або в декарт. СК} \end{cases}$

(3) $k_{1x}\cdot x + k_{1y}\cdot y + k_{1z}\cdot z = k_{2x}x + k_{2y}y + k_{2z}z = k_{3x}\cdot x + k_{3y}\cdot y + k_{3z}\cdot z$

$(k_{1x} = \vec{k}_x\cdot\vec{i})$

1) Остання умова повинна виконуватись для будь-яких x та y

2) $z = 0$ (на межі розділу)

Тому: Для $x = 0$ $\quad k_{1y} = k_{2y} = k_{3y}$ (4)

Висновки: Для $y = 0$ $\quad k_{1x} = k_{2x} = k_{3x}$ (5)

1. З (4) та (5) $\Rightarrow$ хвильові вектори відбитої та заломленої хвиль $\vec{k}_2$ та $\vec{k}_3$ лежать в площині падіння (в пл., в якій лежать $\vec{k}_1$ та $\vec{n}$).

Таким чином: всі 4 вектори: $\vec{n}$, $\vec{k}_1$, $\vec{k}_2$, $\vec{k}_3$ лежать в одній площині (компланарні).

2. Направимо вісь x вздовж границі розділу так, щоб пл. xz співпадала із пл. падіння. Тоді

$k_{1y} = k_{2y} = k_{3y} = 0$; $\quad k_{1x} = k_{2x} = k_{3x}$, (6)

де $k_{1x} = k_1\cdot\sin\theta_1$; $\quad k_{2x} = k_2\sin\theta_2$; $\quad k_{3x} = k_3\sin\theta_3$ (7)

$k_1 = \frac{\omega}{c}n_1 \qquad k_2 = \frac{\omega}{c}n_1 \qquad k_3 = \frac{\omega}{c}\cdot n_2$ (8)

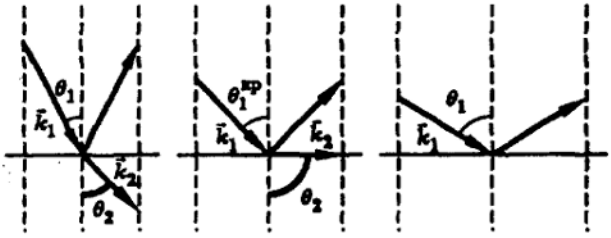
$n_1 = \sqrt{\varepsilon_1}$; $\quad n_2 = \sqrt{\varepsilon_2}$. З (6), (7) $\Rightarrow$ $\boxed{\theta_1 = \theta_2}$ (9)

Закон відбиття

3. Якщо обидва середовища прозорі, то n_1, n_2 – дійсні. 5а

(7), (8) → (6): $\frac{\omega}{c} n_1 \cdot \sin\theta_1 = \frac{\omega}{c} n_2 \sin\theta_2$ — закон Снелліуса

Повне внутрішнє відбиття



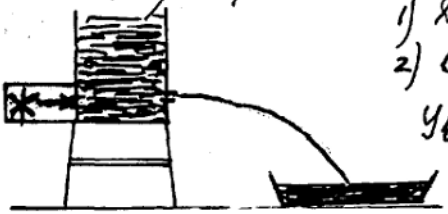
$n_1 > n_2$!

$\theta_2 > \theta_1$ – це випливає із закону Снелліуса $n_1 \cdot \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$

Якщо $\theta_2 = 90°$ ($\sin\theta_2 = 1$), то

$$\theta_1^{кр} = \arcsin\frac{n_2}{n_1}$$

При $\theta_1 = \theta_1^{кр}$ заломлений промінь не заходить в II середовище, а розповсюджується вздовж границі поділу (рис. б). Ефект повного внутрішнього відбиття, $\theta_1^{кр}$ – граничний кут ПВВ. На границі скло-повітря ($n_1 = 1.5$; $n_2 = 1.0$) $\theta_1^{кр} \cong 42°$.



1) Демонстрація прояву ПВВ (див. рис.).
2) Оптичне волокно.

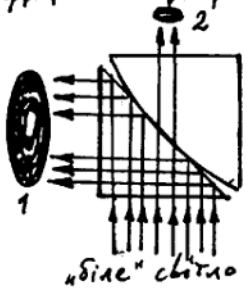
Увага!: Промінь ковзає вздовж межі розділу лише при $\theta_1 = \theta_1^{кр}$ (рис. б). При $\theta_1 > \theta_1^{кр}$ є тільки 2 промені: падаючий та відбитий (рис. в)

3) Ефектом ПВВ пояснюється відбиття радіохвиль від іоносфери. На висоті 100–300 км існує іонізований шар атмосфери, від якого відбиваються ЕМХ з $\lambda > 10$ м. Більш короткі хвилі проходять. В іоносфері $v_ф > c$. Із збільшенням висоти зменшується пок. зал. п. Дальня радіопередача.

58

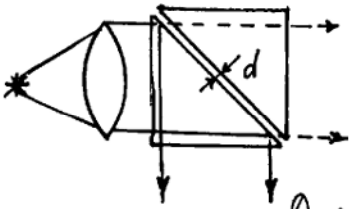
58

Ефект порушення ПВВ при $\theta > \theta^{кр}$.
(Ефект проникнення, „просочування" світла в друге середовище при ПВВ)



Експеримент №1:

В одній із призм зрізаються (зтоншуються, зішліфовуються) кути.
1 - має синій колір, 2 - червоний.
„Просочується" світло із великою λ.



Експеримент №2:

При зазорах між поверхнями призм $d \leq \lambda$ світло „просочується".
Можна використати для модуляції.

Для проміжку „повітря-скло" $\theta^{кр} \approx 42°$ світла

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = n_{21} \Rightarrow \sin\theta_2 = \frac{\sin\theta_1}{n_{21}} \qquad n_{21} < 1.$$

Це означає, що при $\theta_1 \uparrow$ колись $\sin\theta_2$ стане > 1 ?!?

$$\cos\theta_2 = \sqrt{1-\sin^2\theta_2} = \pm\sqrt{1-\frac{\sin^2\theta_1}{n_{21}^2}} = \pm\sqrt{-1}\cdot\sqrt{\frac{\sin^2\theta_1}{n_{21}^2}-1} =$$

$$= \pm j\sqrt{\frac{\sin^2\theta_1}{n_{21}^2}-1} \qquad k_z = k\cdot\cos\theta_2$$

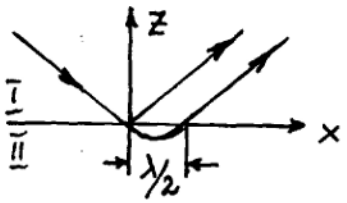
Хвиля, що „просочується", описується виразом:

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_0 \exp\left(\pm jk\cos\theta_2 \cdot z\right)\cdot\exp j(\omega t - k_x\cdot x) =$$

$$= \underbrace{\mathcal{D}_0 e^{\pm jkz\sqrt{\frac{\sin^2\theta_1}{n_{21}^2}-1}}}_{\text{Амплітуда.}} \cdot e^{j(\omega t - k_x\cdot x)}$$

Хвиля з такою амплітудою неоднорідна. Знак „+" не має фіз. сенсу, бо означає нескінченне збільшення амплітуди хвилі в II середовищі. Знак „-" відповідає хвилі, яка швидко затухає по мірі проникнення в II середовище.

Практично ця неоднорідна хвиля існує лише 56
в приповерхневому шарі II середовища, товщина
якого ~ λ.



Частина енергії, яка попадає
в II середовище, потім з неї
виходить.

Оцінимо глибину проникнення:

$$k \cdot z \sqrt{\frac{\sin^2\theta_1}{n_{21}^2} - 1} = 1$$ – умова зменшення ампл. в e раз.

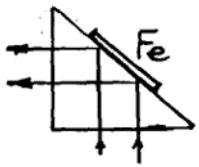
Із врахуванням того,
що $k = 2\pi/\lambda$

$$z = \frac{\lambda}{2\pi\sqrt{\frac{\sin^2\theta_1}{n_{21}^2} - 1}}$$

Коли $\lambda \uparrow$, величина $z \uparrow$.

Коли $\sin\theta_1 = n_{21}$ – неробоча обл.

Хвиля біжить вздовж x, амплітуда змінюється вздовж z
Базуючись на ефекті порушення
ПВВ, можна навіть вимірювати спектри матеріалів



$$n_{21} = n_{21}(\lambda).$$

На порушенні ПВВ базується ближньопольова
оптика (див. останню лекцію курсу).

60

Формули Френеля

Яка доля падаючого на границю двох діелектриків світла відбивається? Заломлюється? Чи залежить вона від величини кута падіння і поляризації падаючого світла?

Відповідь дають формули Френеля.

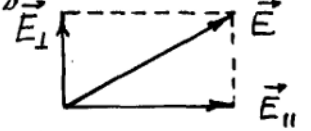
Розрахунок формул Френеля базується на:

1) врахуванні граничних умов;
2) зв'язку між полями $\vec{E}$ та $\vec{H}$ в світловій хвилі, який витікає із рівнянь Максвелла.

Хвилі – плоскі і монохроматичні.

Середовища – лінійні, ізотропні і х-уються $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

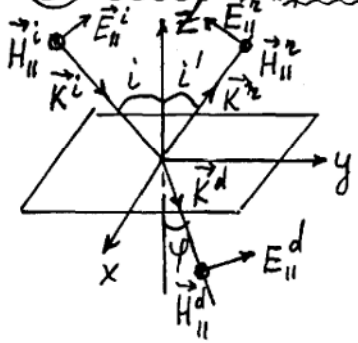
Хвилю з довільним станом поляризації можна представити у вигляді суперпозиції двох лінійно поляризованих хвиль $\vec{E} = \vec{E}_\perp + \vec{E}_\parallel$



Позначення: $E_\parallel$, або E_p – в пл. код в напрямку $\perp$ пл. $E_\perp$, або E_s. падіння

Розглянемо окремо випадки: „p" (або ∥) компоненти та „s" (або ⊥) компоненти.

(I) випадок „p" компоненти (вектор $\vec{E}$ в пл. падіння).



Умова збереження тангенц. складових ел.м. хвилі на границі поділу (граничні умови): для амплітуд для $z = 0$

$$\begin{cases} \vec{H}_\parallel^i + \vec{H}_\parallel^r = \vec{H}_\parallel^d & (1) \\ \vec{E}_\parallel^i - \vec{E}_\parallel^r = \vec{E}_\parallel^d & (2) \end{cases}$$

61

Раніш було встановлено зв'язок між $\vec{E}$ та $\vec{H}$:

$$H_{\parallel}^{i} = n_1 E_{\parallel}^{i}; \qquad H_{\parallel}^{r} = n_1 \cdot E_{\parallel}^{r}; \qquad H_{\parallel}^{d} = n_2 \cdot E_{\parallel}^{d} \quad (3)$$

$(3) \to (1)$: $n_1 \cdot E_{\parallel}^{i} + n_1 \cdot E_{\parallel}^{r} = n_2 E_{\parallel}^{d}$

$$E_{\parallel}^{i} + E_{\parallel}^{r} = \frac{n_2}{n_1} E_{\parallel}^{d} = \frac{\sin i}{\sin \varphi} \cdot E_{\parallel}^{d} \quad (4)$$

З $(2) \Rightarrow E_{\parallel}^{i} \cdot \cos i - E_{\parallel}^{r} \cos i' = E_{\parallel}^{d} \cdot \cos \varphi \quad (5)$

$(4) + (5)$ та враховуючи, що $i = i'$:

$$2E_{\parallel}^{i} = E_{\parallel}^{d} \left(\frac{\sin i}{\sin \varphi} + \frac{\cos \varphi}{\cos i} \right) = E_{\parallel}^{d} \left(\frac{\cos i \cdot \sin i + \cos \varphi \cdot \sin \varphi}{\sin \varphi \cdot \cos i} \right)$$

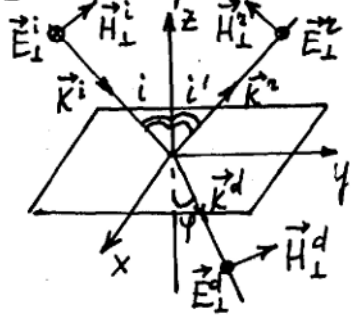
$$= E_{\parallel}^{d} \left(\frac{\sin 2\varphi + \sin 2i}{2 \sin \varphi \cdot \cos i} \right)$$

$$\boxed{E_{\parallel}^{d} = \frac{2 \cos i \cdot \sin \varphi}{\sin(i+\varphi) \cdot \cos(i-\varphi)} \cdot E_{\parallel}^{i}}$$ Перша формула Френеля

$(4) : (5) \Rightarrow \dfrac{E_{\parallel}^{i} + E_{\parallel}^{r}}{E_{\parallel}^{i} - E_{\parallel}^{r}} = \dfrac{\sin i \cdot \cos i}{\sin \varphi \cdot \cos \varphi} = \dfrac{\sin 2i}{\sin 2\varphi}$

$$\boxed{E_{\parallel}^{r} = \frac{\sin 2i - \sin 2\varphi}{\sin 2i + \sin 2\varphi} \cdot E_{\parallel}^{i} = \frac{tg(i-\varphi)}{tg(i+\varphi)} \cdot E_{\parallel}^{i}}$$ II формула Френеля

(II) Випадок „S" компоненти ($\vec{E} \perp$ пл. падіння)



Граничні умови:

$$\begin{cases} \vec{E}_{\perp}^{i} + \vec{E}_{\perp}^{r} = \vec{E}_{\perp}^{d} & (6) \\ \vec{H}_{\perp}^{i} - \vec{H}_{\perp}^{r} = \vec{H}_{\perp}^{d} & (7) \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_{\perp}^{i} = n_1 \cdot E_{\perp}^{i}; \quad H_{\perp}^{r} = n_1 \cdot E_{\perp}^{r} \\ H_{\perp}^{d} = n_2 \cdot E_{\perp}^{d} \end{cases} \quad (8)$$

8

$$(6) \Rightarrow \begin{cases} E_\perp^i + E_\perp^r = E_\perp^d & (9) \\ (7) \Rightarrow \end{cases}$$

$$H_\perp^i \cdot \cos i - H_\perp^r \cdot \cos i' = H_\perp^d \cos\varphi \quad (10)$$

(10) із врахуванням (8) та того, що $i' = i$:

$$n_1 E_\perp^i \cdot \cos i - n_1 E_\perp^r \cos i = n_2 \cdot E_\perp^d \cos\varphi$$

$$E_\perp^i - E_\perp^r = \frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{\cos\varphi}{\cos i} \cdot E_\perp^d \equiv \frac{\sin i}{\sin\varphi} \cdot \frac{\cos\varphi}{\cos i} E_\perp^d \quad (11)$$

$$(9) + (11): \quad 2E_\perp^i = E_\perp^d \left(1 + \frac{\sin i \cdot \cos\varphi}{\sin\varphi \cdot \cos i}\right)$$

$$\boxed{E_\perp^d = \frac{2\sin\varphi \cdot \cos i}{\sin\varphi \cdot \cos i + \sin i \cdot \cos\varphi} E_\perp^i = \frac{2\sin\varphi \cdot \cos i}{\sin(i+\varphi)} \cdot E_\perp^i}$$ III форм. Френеля

$$(6) : (11) \Rightarrow \frac{E_\perp^i + E_\perp^r}{E_\perp^i - E_\perp^r} = \frac{\sin\varphi \cdot \cos i}{\sin i \cdot \cos\varphi}$$

$$\boxed{E_\perp^r = -\frac{\sin(i-\varphi)}{\sin(i+\varphi)} \cdot E_\perp^i}$$ IV формула Френеля

Аналіз формул Френеля

1. Формули Фр. нами отримані для амплітуд. Для енергетичного опису явищ на границі поділу (по інтенс.) вводять коеф. відбиття (R) та коеф. пропускання (T):

$$R = \left(\frac{E^r}{E^i}\right)^2; \qquad T = \frac{n_2}{n_1}\left(\frac{E^d}{E^i}\right)^2$$

2. Якщо $E_\perp^r \neq E_\parallel^r$, то світло (частково) поляризоване.

Для природного світла ($E_\perp^i = E_\parallel^i$)

$$\frac{|E_\perp^r|}{|E_\parallel^r|} = \frac{\cos(i-\varphi)}{\cos(i+\varphi)} > 1 \Rightarrow E_\perp^r > E_\parallel^r$$

З II та IV формул Френеля витікає: відбите світло - частково поляризоване з переважно напрямленим вектором поляризації в „s" компоненті.

63

3. Якщо $E_\perp^i = E_\parallel^i$, то світло природне.
В природному світлі $J_\perp^i = J_\parallel^i = \frac{1}{2} J_0$

4. Ступінь поляризації: $\rho = \frac{J_\perp - J_\parallel}{J_\perp + J_\parallel}$

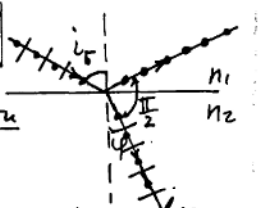
5. Якщо $i + \varphi = \frac{\pi}{2}$, то з (II): $tg\, \pi/2 \to \infty \Rightarrow$
$E_\parallel^z = 0 \Rightarrow$ після відбиття світло повністю поляризоване!
Кут падіння (i), для якого виконується умова $i+\varphi = \frac{\pi}{2}$, наз. кутом Брюстера ($i_Б$).

Для $n_2 > n_1 \Rightarrow i_{Б-1}$
~~$n_2 < n_1$~~ – не існує!
Для $n_2 < n_1 \Rightarrow i_{Б-2}$
$i^{кр} > i_{Б-2}$
$i_{Б-1} > i_{Б-2}$

$$\frac{\sin i}{\sin \varphi} = \frac{\sin i_Б}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - i_Б\right)} = \frac{\sin i_Б}{\cos i_Б} = tg\, i_Б \quad \text{з іншого боку} \quad \overset{\text{Б}}{=} \frac{n_2}{n_1}$$

$$\boxed{i_Б = arc\, tg\, \frac{n_2}{n_1}}$$

Для $i_Б$ відбитий та заломлений кути ортогональні



Для переходу повітря-скло ($n = 1.5$) кут $i_Б \approx 57°$

6. Для нормального падіння світла на границю поділу двох середовищ $i = i' = 0$. Кут $\varphi = 0$ також.

$$E_\perp^z = E_\parallel^z = -\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} E^i$$

7. Якщо $i \to \frac{\pi}{2}$, то $(E_\perp^z$ та $E_\parallel^z) \to E_\perp^i$ та $E_\parallel^i$.

8. За допомогою формул Френеля можна порахувати $\frac{R}{T}$ та $\frac{T}{T}$.

$$R_\perp = \left(\frac{E_\perp^z}{E_\perp^i}\right)^2 = \frac{\sin^2(i-\varphi)}{\sin^2(i+\varphi)}$$ Коеф. відбиття для „s" компоненти

$$R_\parallel = \left(\frac{E_\parallel^z}{E_\parallel^i}\right)^2 = \frac{tg^2(i-\varphi)}{tg^2(i+\varphi)}$$ Коеф. відбиття для „p" компоненти світла

$$T_\perp = \frac{n_2}{n_1}\left(\frac{E_\perp^d}{E_\perp^i}\right)^2; \quad T_\parallel = \frac{n_2}{n_1}\left(\frac{E_\parallel^d}{E_\parallel^i}\right)^2$$ Коеф. проходження для „s" та „p" компонент

64

Для природного світла: 10

$$R = \frac{(E_\perp^r)^2 + (E_\parallel^r)^2}{(E_\perp^i)^2 + (E_\parallel^i)^2} \overset{E_\perp = E_\parallel}{=} \dots = \frac{1}{2}(R_\perp + R_\parallel) = R$$

10. Можна ввести кут $\alpha_i = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{E_\perp^i}{E_\parallel^i}\right)$

$\operatorname{tg}\alpha_i = \frac{E_\perp^i}{E_\parallel^i}$ де α_i – азимут падаючого світла

$\alpha_i = 0$: $\vec{E} \parallel$ пл. падіння $\Rightarrow E_\perp = 0 \Rightarrow$ Існує лише „p" компонента

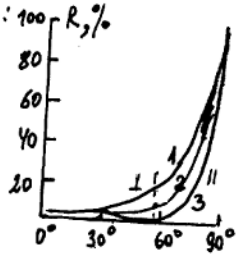
$\alpha_i = \frac{\pi}{2}$: $\vec{E} \perp$ пл. падіння $\Rightarrow E_\parallel = 0 \Rightarrow$ Існує лише „s" компонента

$\alpha_i = \frac{\pi}{4}$: $E_\perp = E_\parallel$

Фриш, Тиморева ... с. 144

При відбитті лінійно поляризованого світла з азимутом $\alpha_i \neq 0$ відбувається поворот вектора поляризації. Азимут змінюється! При куті падіння, наприклад, $i = 30°$ і азимуті $\alpha_i = 45°$ існує поворот $\vec{E}$ на 12°.

11. Графік залежності R від i :

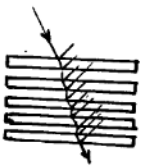


1 – „s" компонента ($R_\perp$)
2 – природне світло
3 – „p" компонента ($R_\parallel$)

На всій кривій виконується $R_\perp + R_\parallel = 2R$

Наприклад! →
1+2 = 2·1.5
2+4 = 2·3
4+6 = 2·5

12. Стопа Столєтова



На стопу падає природне світло.
Із стопи виходить частково поляриз. світло.
Ідеальний поляризатор ($p = 100\%$) при $n = \infty$. Для $n = 8–10$: $p \sim 44\%$
n – кількість пластин в стопі.

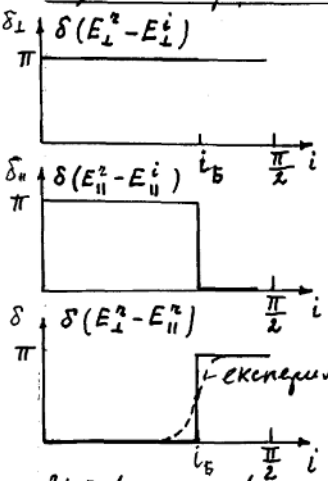
65

11

Фазові співвідношення у відбитому та заломленому світлі

$n_1 < n_2 \Rightarrow i > \varphi$ — світлі

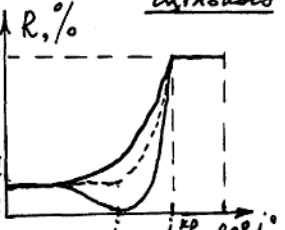
Знак "-", наприклад, в IV формулі Френеля каже про зсув між фазами падаючої та відбитої хвилі на π



i – експерим. – див. Білий ... с. 230

Відбивання світла від середовища менш оптично щільного

$n_2 < n_1 \Rightarrow i < \varphi$



Вже розглядали ефект ПВВ з $i^{кр}$ та ефект Брюстера з $i_Б$

$\sin i^{кр} = n_{21}$

$\operatorname{tg} i_Б = n_{21}$

Для скла-повітря:

$\sin i^{кр} = \frac{1}{1.5} = 0.6667$

$n_{21} = 0.6667$

$i_Б = 33°45'$

$i^{кр} = 42°$; (1) $\operatorname{tg} \frac{\delta_\parallel - \delta_\perp}{2} = \frac{\cos i \sqrt{\sin^2 i - n_{21}^2}}{\sin^2 i}$

(1) із того, що вели позначення:

$\frac{E_\parallel^r}{E_\parallel^i} = e^{i\delta_\parallel}$;

$\frac{E_\perp^r}{E_\perp^i} = e^{i\delta_\perp}$

Позначення:

$\delta_\parallel = \delta(E_\parallel^r - E_\parallel^i)$; $\delta_\perp = \delta(E_\perp^r - E_\perp^i)$; $\delta_\parallel - \delta_\perp = \delta$

Продиферен. (1) по i та прирівняємо $\frac{\partial}{\partial i}\left(\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\right) = 0$

$\Rightarrow$ одержимо умову виникнення так різних фаз:

$$\cos i_{max} = \sqrt{\frac{1-n_{21}^2}{1+n_{21}^2}} \quad \text{або} \quad \sin i_{max} = \sqrt{\frac{2n_{21}^2}{1+n_{21}^2}} \qquad (2)$$

(2) → (1):

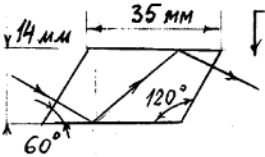
$$\operatorname{tg}\frac{\delta_{max}}{2} = \frac{1-n_{21}^2}{2n_{21}} \qquad (3)$$

Формула (2) - для знаходження i_{max} по n_{21};
формула (3) - для знаходження δ_{max} по n_{21}.

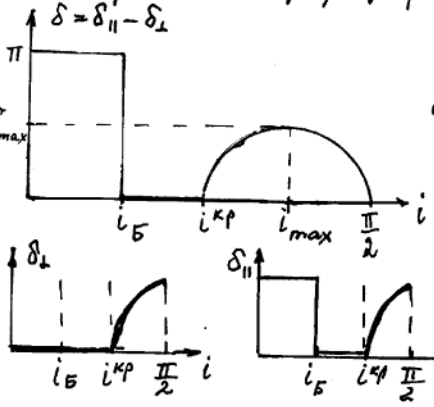
Чим більша різниця в показниках заломлення (чим менше їх відношення $n_{21} = n_2/n_1$), тим більше різниця фаз між двома коливаннями ($\delta = \delta_\parallel - \delta_\perp$).

Для отримання циркулярної поляризації, для якої потрібно, щоб $\delta_{max} = \pi/2$ і $\operatorname{tg}\frac{\delta_{max}}{2} = 1$, різниця в n повинна бути дуже великою. Із умови $(1-n_{21}^2)/2n_{21} = 1$ знаходимо, що $n_{21} \approx 0.4$. Це досягається лише для алмаза (в оптичному діапазоні):
$n_1 = 2.4$; $n_2 = 1.0$ $\Rightarrow$ $1/2.4 \approx 0.4$

Для границі скло-повітря $i_{max} \approx 51°$ (із (2)) і при одноразовому проходженні світла через межу ніяк отримати циркулярну поляризацію не можна.



СРС: призма Френеля
Ландсберг... с. 486
Калитеевский... с. 84



Величина $\delta = \delta_\parallel - \delta_\perp$ обертається в нуль двічі:
1) при $i_Б < i < i^{кр}$
2) при $i = \frac{\pi}{2}$ (ковзаюче падіння світла)

67

Класична теорія ел.м. випромінювання

Модель лінійного гармонічного осцилятора (електричного диполя): ізольований атом у вакуумі ($\varepsilon = \mu = 1$; $v = c$). Осцилює електрон, ядро - нерухоме.

Рівняння руху електрона: $m\ddot{\vec{r}} = \alpha \vec{r}$ (α-коеф. квазіпружн.)

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 e^{i\omega_0 t}, \text{ де } \omega_0^2 = \frac{\alpha}{m} \quad (1)$$

Зміщення ел-на створює дип. мом. $\vec{p}(t) = q \cdot \vec{r}(t)$

Диполь Герца є джерелом ефектив. ел.м. хвилі, вектори $\vec{E}$ та $\vec{H}$ якої на великій відстані від джерела, в так званій хвильовій зоні, рівні по величині і взаємно перпендикулярні.

хвильова зона ≡ дальня зона:

$a \ll \lambda \ll R$

a - розмір диполя (характерний розмір атома або молекули)

$a \approx 10^{-8}$ см

$\lambda \approx 10^{-4}$ см

$R \approx 1$ см

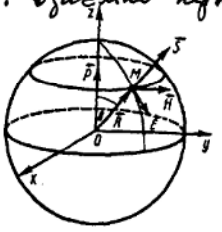


Рис. 1

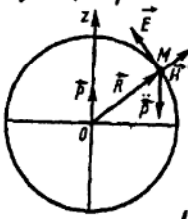


Рис. 2

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_0 \sin\omega t \quad (2)$$

$$\ddot{\vec{p}}(t) = -\omega^2 \vec{p}_0 \sin\omega t \quad (3)$$

Вектори $\vec{p}$ та $\ddot{\vec{p}}$ протилежні за напрямом.

Радіус-вектор $\vec{R}$, проведений з початку СК в точку спостереження т.М, складає кут θ з напрямом $\vec{p}$ (рис. 1).

Розв'язуючи хвильове рівняння для хвильової зони, можна отримати, що

$$\vec{H}(t) = \frac{1}{c^2 R}\left[\ddot{\vec{p}}\left(t - \frac{R}{c}\right) \times \vec{R}_0\right] \quad (4)$$

$$\vec{E}(t) = \left[\vec{H}(t) \times \vec{R}_0\right] \quad (5)$$

де $\vec{R}_0 = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|}$ - одиничний вектор по напрямку $\vec{R}$

Аргумент $\left(t - \frac{R}{c}\right)$ при $\ddot{\vec{p}}$, обумовлений кінцевою величиною швидкості розповсюдження ел.м.хв. (хвиля в т.М в момент часу t визначається значенням в більш ранній момент часу).

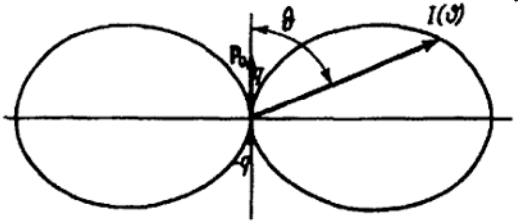
$$|\vec{E}| = |\vec{H}| = \frac{|\ddot{\vec{P}}(t - R/c)|}{c^2 R} \cdot \sin\theta \qquad (A)$$

Проаналізуємо (A):

1) При $\theta = 0$ (вздовж $\vec{P}$) $H = E = 0$: диполь не випромінює ел.м. енергію в напрямку своєї осі;

2) При $\theta = \pi/2$ $E = E_{max}$: max випромінювання відбувається в напрямку $\perp$ до осі диполя.

3) При $\theta = const$ $E = H \sim \frac{1}{R}$: випромінюється сферична хв. хвиля



4) $E \sim \frac{1}{R} \Rightarrow$ в обл. хвильової зони можна позбавитись від вкладу $E_{стат} \sim \frac{q}{R^3}$ і можна його не враховувати.

Інтенсивність випромінювання

Вектор Умова–Пойнтінга

$$|\vec{S}| = \frac{c}{4\pi} E^2 = \frac{\ddot{P}^2}{4\pi c^3 R^2} \sin^2\theta = \frac{q^2 \cdot \ddot{r}^2}{4\pi c^3 R^2} \sin^2\theta \qquad (6)$$

Величина S визначає миттєве значення потоку ел.м. енергії в напрямку θ. Потік ен. за од. часу по всім напрямам $\mathcal{Y} = \int S \cdot d\sigma$. Інтегруємо по замкненій поверхні, яка оточує осцилятор.

В сфер. системі коорд. $d\sigma = R^2 \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi$

$$\mathcal{Y} = \frac{\ddot{P}^2}{4\pi c^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin^3\theta \cdot d\theta = \frac{\ddot{P}^2}{2c^3} \int_0^{\pi} (1 - \cos^2\theta) \sin\theta \, d\theta =$$

$$= \boxed{\frac{2\ddot{P}^2}{3c^3} = \mathcal{Y}} \quad (7) \xrightarrow{\vec{P} = q \cdot \vec{r}} \boxed{\mathcal{Y} = \frac{2q^2 \cdot \ddot{r}^2}{3c^3}} \quad (8)$$

Світлові хвилі випромінюються при прискореному русі заряду

Частота світл. коливань $\nu = 10^{14} \div 10^{15} c^{-1}$. Око реагує на усереднене по часу T значення енергії

$$\langle J \rangle = \frac{2}{3c^3} \langle \ddot{p}^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T J\,dt = \frac{2\omega_0^4 p_0^2}{3c^3} \underbrace{\langle \cos^2 \omega_0 t \rangle}_{=1/2} =$$

$p = p_0 \cos \omega_0 t$

$$= \boxed{\frac{\omega_0^4}{3c^3} p_0^2 = \langle J \rangle} \quad (9)$$

$\langle J \rangle$ - сер. енергія, або потужн. випр.

$\langle J \rangle \sim \omega_0^4$ або $\langle J \rangle \sim \frac{1}{\lambda_0^4}$ (як і в релеєвськ. розсіюв.

Добротність випромінювання

Осцилятор - загухаючий. Розглянута вище теорія (не враховували загухання!) правильна, якщо втрати ен. за рахунок випромінювання при великому числі коливань складає малу частину ...

Для $\nu = 10^{14} c^{-1} \Rightarrow Q = 10^7$ — дуже багато: можна брати середнє значення для великої кількості коливань. Це середнє значення ен. повільно змінюється із часом. "Повільно" — порівняно із яким часом?:

71
5.

Фізика взаємодії світла із речовиною.
(Класична осциляторна модель середовища)

Світло заставляє коливатись електрони в атомі → віддаючи свою енергію, світло поглинається → однак заряди, що коливаються, самі стають джерелами вторинних світлових хвиль → світлове поле в середовищі формується в результаті інтерференції падаючого випромінювання і вторинних світлових хвиль.

Середовище веде себе як суцільна речовина.

Класифікація середовищ.

1. Середовище без дисперсії: залежність $\vec{P}(\vec{E})$ є локальна та безінерційна, тобто значення поляризації середовища в деякій точці простору і в деякий момент часу визначається значенням поля $\vec{E}$ в тій же самій точці і в той же момент.
2. Середовище з просторовою дисперсією: нелокальність відгуку: $D = \varepsilon(k) \cdot E$
3. Часова (або частотна) дисперсія: інерційність відгуку, тобто запізнювання $\vec{P}$ відносно $\vec{E}$. $\Rightarrow \varepsilon(\omega)$
4. Лінійне середовище: $\vec{P} = \hat{L}(\vec{E})$, де $\hat{L}$ - лінійний оператор.
5. Нелінійне середовище: $\vec{P} = \hat{NL}(\vec{E})$, де $\hat{NL}$ - нелінійний оператор
6. Ізотропне середовище: $\vec{P} \parallel \vec{E}$
7. Анізотропне середовище: $\vec{P} \nparallel \vec{E}$

Властивості середовища (дисперсія, лінійність, ізотропність) не пов'язані між собою

72

6.

Будемо розглядати ізотропне, лінійне середовище.

Класична модель атома.



Опт. середовище складається із сукупності гармонічних ел-них осциляторів, які не взаємодіють між собою. (Така ситуація підходить до газу).

Під дією ел. поля хвилі в кожному осциляторі виникає дип. момент $p = r \cdot e$, де r – зміщення ел-на від положення рівноваги.

В од. об'єму є N осциляторів.

Поляризація од. об'єму $P = Np = N \cdot re$

Вважаємо, що всі осцилятори одного типу і мають одну частоту власних коливань.

В СГСЕ:

Діел. індукція середовища $\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \vec{E} + 4\pi \vec{P} =$

$= \vec{E} + 4\pi N e \vec{r}$ $\qquad \varepsilon = 1 + \frac{4\pi P}{E} = 1 + 4\pi\beta$

зовн. поле — поле поляризації $\qquad \beta$ – діелектр. сприйнятл.

У гармон. наближенні діє квазіпружна сила $\vec{F}_1 = -b\vec{r}$, де b – стала пружності.

Коливання є затухаючим ⇒ Сила тертя $\vec{F}_2 = -g\frac{d\vec{r}}{dt}$

де g – коеф. тертя.

На ел-н діє ще зовнішня сила з боку хвилі:

$\vec{F}_3 = e\vec{E}$, де $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos\omega t$ (або $\vec{E} = E_0 e^{i\omega t}$).

Рівняння руху електрона: $m\ddot{\vec{r}} = -b\vec{r} - g\dot{\vec{r}} + e\vec{E}$ або:

(1) $\ddot{\vec{r}} + 2\gamma\dot{\vec{r}} + \omega_0^2\vec{r} = \frac{e}{m}\vec{E}$ де $2\gamma = \frac{g}{m}$, γ – коеф. затух.

$\omega_0^2 = \frac{b}{m}$; власна цикул. частота коливань ел-на (ω)

(1) – рівняння вимушених коливань. Розв'язок шукаємо у вигляді $\vec{r} = \vec{r}_0 e^{i\omega t} \Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = i\omega\vec{r}$; $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\omega^2\vec{r}$

73

Атоми не взаємодіють між собою.

$\vec{P} = N \cdot \vec{p}$

$\vec{p} = e\vec{r} = \varepsilon_0 \alpha \cdot \vec{E}$

$\vec{P} = \beta \varepsilon_0 \vec{E}$

$\beta = N \cdot \alpha$

α - поляризованість атома

β - діелектрична сприйнятливість

Електронна теорія дисперсії світла

$$\vec{r} = \frac{e/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega} \cdot \vec{E}, \quad \text{де } \omega_0^2 = \frac{b}{m}$$

В СІ:

$$\vec{P} = e\vec{r} \cdot N = \frac{Ne^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega} \cdot \vec{E}; \qquad \varepsilon = 1 + \frac{P}{E \cdot \varepsilon_0} = 1 + \beta.$$

$$\varepsilon = 1 + \frac{Ne^2/(m \cdot \varepsilon_0)}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega} \qquad (2) \qquad \varepsilon(\omega)!$$

(2) – вираз для комплексної діел. проникності середовища в моделі Лоренца

Дисперсія і поглинання світла в лінійній ізотропному середовищі

В рамках моделі суцільного середовища (моделі Лоренца). Введемо дійсну і уявну частину комплексного показника заломлення середовища $n^* = n' - in''$.

Те * для хвильового числа $k = k' - ik''$, де параметри $k' = \frac{\omega}{c} \cdot n'$ та $k'' = \frac{\omega}{c} n''$.

n' визначає швидкість розповсюдження хвилі, а n'' – затухання світлової хвилі

Оскільки $n' = n'(\omega)$, а $v_\phi = \frac{\omega}{k'} = \frac{c}{n'}$, маємо, що v_ϕ залежить від частоти світла. Це явище називається дисперсією.

Враховуючи, що $\varepsilon = (n' - in'')^2$, маємо

$$(n' - in'')^2 = 1 + \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega} \quad \Big| * \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 - i2\gamma\omega}$$

$$n'^2 - n''^2 - i2n' \cdot n'' = 1 + \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} - i\frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m} \cdot \frac{2\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}$$

Поділимо на дійсну (Re) та уявну (Im) частини:

74

8.

Для спрощення викладок (за формою) позначимо:

$n' \Rightarrow n$; $n'' \Rightarrow \chi$

$$\begin{cases} n^2 - \chi^2 = 1 + \dfrac{e^2 N}{\varepsilon_0 m} \dfrac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \\ 2n\chi = \dfrac{e^2 N}{\varepsilon_0 m} \dfrac{2\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \end{cases} \quad (A)$$

Співвідношення (A) визначають показник заломлення (n) та показник поглинання (χ) через частоту світла (ω) і молекулярні параметри речовини N та e/m.

Аналіз (A):

I. Випадок коли $\chi = 0$.

Оскільки загасання (δ) в опт. діапазоні досить мале, за винятком частот $\omega \approx \omega_0$, тобто $\gamma \cdot \omega \ll \omega_0^2 - \omega^2$, будемо вважати, що $\chi = 0$ та $\gamma = 0$. Тоді з (A):

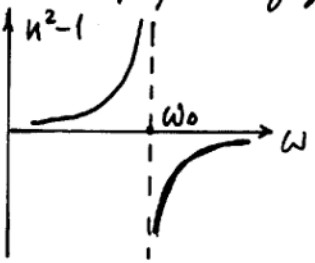
$$n^2 = 1 + \frac{e^2}{\varepsilon_0 m} \cdot N \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (B)$$

залежність $n(\omega)$ в середов. без загух.

1) При $0 < \omega < \omega_0$ $n > 1$

при $\omega = \omega_0$ $n = \pm\infty$

при $\omega_0 < \omega \leq \infty$ $n < 1$



2) Для випадку $\omega \ll \omega_0$ співвідношення (B) можна розкласти в ряд за степенями ω/ω_0 і обмежитись двома членами ряду. У цьому випадку:

$$n^2 = 1 + \frac{e^2}{\varepsilon_0 m \omega_0^2} N \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right] \quad (C)$$

Для випадку $\omega \ll \omega_0$ (випадок далекого ІЧ світла або НВЧ діапазону) $n \neq f(\omega) \Rightarrow n = \text{const}$; $n > 1$

75

Оскільки $\omega = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot c$, а $\omega_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}\cdot c$, то $(c) \Rightarrow$ 9.

$$n^2 = 1 + A\left(1 + \frac{B}{\lambda^2}\right) \quad \text{де } A = \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m \omega_0^2};\ B = \frac{4\pi^2 c^2}{\omega_0^2}$$

Це рівняння подібно до співвідношення Коші:

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \dots$$

Розходження між теорією і експериментом 10–20%

3) При $\omega_0 = 0$ (цей стан характерний для плазми):

$$n^2 = 1 - \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m \omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \Big\} n < 1 \ ! \Rightarrow v_\phi > c\ !$$

Якщо $\omega^2 = \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m}$, то $n = 0 \Rightarrow \boxed{\sqrt{\frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m}} = \omega_p}$ – плазмова частота

Якщо $\omega^2 > \omega_p$, то $0 < n < 1$ $\left(n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)$.

якщо $\omega^2 < \omega_p$, то $n < 0$ – хвилі відбиваються

ефект віддзеркалення хвиль $\lambda \sim 1$ м від іоносфери. Ви

77

11.

Нормальна та аномальна дисперсії

Обл. нормальної дисперсії: $\frac{\partial n}{\partial \lambda} < 0$ $\left(\frac{\partial n}{\partial \omega} > 0\right)$.

Обл. аномальної дисперсії: $\frac{\partial n}{\partial \lambda} > 0$ $\left(\frac{\partial n}{\partial \omega} < 0\right)$.

Біля центра лінії поглинання, там, де поглинення світла максимальне, дисперсія — аномальна: з ростом ω величина n падає.

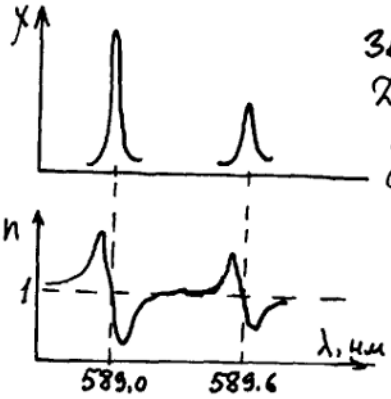
За межами смуги поглинання, там, де середовище прозоре, дисперсія — нормальна: з ростом ω величина n зменшується.

Сила осциляторів

Вимірювання величини N у (1) не співпадають з кількістю осциляторів в од. об'єму (N_0). Завжди $N < N_0$. Тому для узгодження з експериментом було введено сталу $f \le 1$, яка пов'язує N та N_0: $N = f \cdot N_0$. f називається силою осцилятора.

Реальні атоми мають не одну, а, як правило, декілька спектральних ліній поглинання. Тому з (2):

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 + 2i\gamma_j \cdot \omega}$$



Звичайно f_j нормують: $\sum_j f_j = 1$.

Для атомів лужних металів, у яких на зовн. оболонці 1 ел-н.

Наприклад, для 2-х D-ліній натрію

$f_1\left(3^2S_{1/2} \to 3^2P_{1/2}\right) = 0.325$

$f_2\left(3^2S_{1/2} \to 3^2P_{3/2}\right) = 0.65$

$f_1 + f_2 \approx 1$

78

12.

Врахування впливу взаємодії молекул на дисперсію. Показник заломлення щільних середовищ

Треба розрізняти зовн. поле E (поле світлової хвилі) та діюче на осцилятор (ефективне) $E_{еф}$ поле. Треба враховувати вплив полів від сусідніх атомів (молекул), поляризованих дією світла.

Розгляд – для ізотропного випадку.

Лоренц показав, що $E_{еф} = E + \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{P}{3}$ (1). Тому рівняння $m\ddot{r} + b\dot{r} = eE \rightarrow m\ddot{r} + b\dot{r} = eE + \frac{1}{3\varepsilon_0}eP$

Враховуючи, що $\vec{P} = eN\vec{r}$, та домноживши (1) на eN, отримуємо $m\ddot{P} + b\dot{P} = Ne^2E + \frac{Ne^2}{3\varepsilon_0}P$ (2)

$\omega_0^2 = \frac{b}{m}$; $b = m\omega_0^2$

$m\ddot{P} + \left(m\omega_0^2 - \frac{Ne^2}{3}\right)P = Ne^2E \equiv Ne^2E_0\sin\omega t$ (3)

Розв'язок (3) шукаємо у вигляді $\vec{P} = \vec{P}_0\sin\omega t$

де $P_0 = \dfrac{e^2NE_0}{m\left(\omega_0^2 - \frac{Ne^2}{3m\cdot\varepsilon_0} - \omega^2\right)}$

Відомо, що $\varepsilon = 1 + \frac{P}{\varepsilon_0 E}$, та $n^2 = \varepsilon$. Тоді

$$n^2 = \varepsilon = 1 + \frac{e^2N}{\varepsilon_0 m\left(\omega_0^2 - \frac{Ne^2}{3m\cdot\varepsilon_0} - \omega^2\right)} = 1 + \frac{e^2N\frac{1}{m\cdot\varepsilon_0}}{(\omega_0^2-\omega^2) - \frac{Ne^2}{3m\cdot\varepsilon_0}}$$

$$(n^2-1)(\omega_0^2-\omega^2) = \frac{e^2N}{3m\cdot\varepsilon_0}(n^2-1+3)$$

$$\boxed{\frac{n^2-1}{n^2+2} = N\frac{e^2}{3\varepsilon_0 m(\omega_0^2-\omega^2)}}$$

Формула Лоренц-Лоренца 1880 р, Г.А. Лоренц та Л. Лоренц

$\frac{n^2-1}{n^2+2}\cdot\frac{1}{N} = \text{const}$ або $\frac{n^2-1}{n^2+2}\frac{1}{\rho} = \text{const}$ для $\lambda = \text{const}$

(N – кількість атомів в од. об'єму, тобто $N \sim \rho$)

$\rho = m \cdot N$, m – маса атома (молекули).

Величина $\frac{n^2-1}{n^2+2} \cdot \frac{1}{\rho} = R$ наз. (питомою) рефракцією речовини.

Дослід підтверджує той факт, що при зміні густини багатьох прозорих середовищ (повітря, кисень, водяна пара тощо) під дією тиску при незмінній температурі і навіть при зміні агрегатного стану, величина R залишається сталою.

Для повітря (при зміні ρ в 150 разів):

Густина, ρ	n	$R = \frac{1}{\rho}\frac{n^2-1}{n^2+2}$	$10^4(n-1)$
1	1.00029	$1953 \cdot 10^{-7}$	2.9
42,1	1.0124	$1959 \cdot 10^{-7}$	12.4
96.2	1.0284	$1961 \cdot 10^{-7}$	28.4
149.5	1.0442	$1956 \cdot 10^{-7}$	44.2

Із точністю 2-3% величина R – незмінна

Рефракція R при утворенні суміші складається адитивно: $R \cdot m = \sum_i m_i R_i$.

Це означає, зокрема, що вклад окремих атомів на заломлення світла є незалежним.

Фактори, які підтверджують клас. теорію дисперсії Лоренца

1. Рефракція R
2. Дисперсія в обл. високих частот ($\omega >> \omega_0$): $n \to 1$

$n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$; $2\pi c/\omega_p \cong 0.3$ мкм (УФ).

Рентгенівське випром. майже не відбивається і не заломлюється. Інерція електронів на ВЧ ел.м. випром. висока і не дозволяє їм відслідковувати коливання

80

Амплітуда коливань ел-нів в такому полі досить мала. Випромінювання та речовина взаємодіють дуже слабо. Ускладнення у створенні рентген. лазера, рентгенівської оптики (призми, лінзи, дзеркала, резонатори).

3. Дисперсія в обл. низьких частот ($\omega \ll \omega_0$)

$n = 1 + A + \frac{B}{\lambda^2} + \dots$ дисперсійна формула Коші

A, B – сталі, можна розрахувати

$A = 2\pi N \frac{e^2}{m\omega_0^2}$

$B = \lambda_0^2 = \left(\frac{2\pi c}{\omega_0}\right)^2$

$h\omega_0 = E = \frac{me}{2\hbar^2} =$

$= 13.6$ еВ

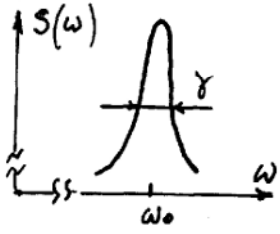
Газ	$A \cdot 10^5$	$B \cdot 10^{11}$, см^2	
Аргон	27.92	5.6	Експеримент
Азот	29.19	7.7	
Гелій	3.48	2.3	
Водень	13.6	7.7	
Кисень	26.63	5.07	
Повітря	28.79	5.67	

$\lambda_0 = 10^{-5}$ см ; $N = N_0 = 2.7 \cdot 10^{19}$ см$^{-3}$

Для водню: $A = 1.2 \cdot 10^{-4}$; $B = 10^{-10}$ см^2. Результати вимірювань добре підтверджують ці оцінки.

4. Форма спектральної лінії

Для реальних атомів і молекул форми спектр. ліній відрізняються великою різноманітністю. Однак, відомі спектр. лінії, які експериментально спостерігаються, мають просту лоренцеву форму



$$S(\omega) = \frac{\Omega}{\pi} \frac{E_0^2/4}{\gamma^2/4 + (\omega - \omega_0)^2}$$

$\gamma = \frac{1}{\tau}$. Потужність випромінювання пропорц. числу осциляторів N, а також середній частоті спалахів окремого осцилятора Ω.

81

5. Модель Лоренца знаходить своє підтвердження в квантовій теорії: при не сильних світлових полях динаміка дип. моменту атома дійсно адекватно описується рівнянням класичного осцилятора. 15.

Методи дослідження дисперсії і поглинання світла

Дослід Ньютона

Нормальна дисперсія

$\frac{dn}{d\lambda} < 0$

Фиолетовый

Метод схрещених призм Ньютона

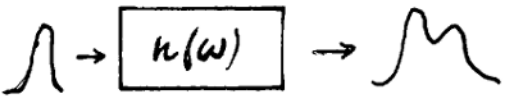


б)

тика („крюки") в залежності від λ поблизу резонансних ліній алюмінію

83

Постановка задачі:



На вході: плоска монохр. світлова хвиля попадає в лінійне ізотропне середовище із дисперсією $n(\omega)$

$k(\omega) = \frac{\omega}{c} n(\omega)$

$\Delta\omega$ – ширина спектр. лінії; ω – несуча частота

Розглядаємо світловий імпульс з вузькою смугою:

$\Delta\omega \ll \omega$. $\Rightarrow$ тривалість імпульсу $(\tau_0) \gg$ періоду світл. коливань (T_0) : $\tau_0 \gg T_0$ – умова вузької смуги

в оптиці $T_0 = 10^{-14} - 10^{-15}$ с. Значить:

$\tau_0 \geq 10^{-13}$ с

Сигнал на вході: $\vec{E}_{вх}(t) = \vec{E}_0(t) \cdot e^{i\omega_0 t}$

Сигнал на виході: $\vec{E}(t) = \vec{E}(t) \cdot e^{i\omega_0 t}$

Розкладаємо амплітуду $E_0(t)$ та $E(t)$ в інтеграл Фур'є

$$E_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_0(\omega) e^{i\omega t} d\omega \qquad (1)$$

$$E(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) e^{i\omega t} d\omega \qquad (2)$$

Процес розповсюдження світл. хвилі можна описати формулою $E(\omega) = E_0(\omega) e^{-ik(\omega)z}$ (3)

Спектральна амплітуда $E_0(\omega)$ виражається через комплексну амплітуду вх. сигналу $E_0(t)$ за допомогою зворотного перетворення Фур'є

$$E_0(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E_0(t) e^{-i\omega t} dt \qquad (4)$$

Задача розв'язана: знаючи вид амплітуди вх. сигналу $E_0(t)$ по ф-лах (1)-(3) знаходять ампл. сигналу на виході дисперсного середовища.

Формули (1)-(3) виражають три послідовних етапи розв'язку задачі:
- фур'є аналіз вх. сигналу;
- перетворення спектральної компоненти поля диспергуючим середовищем;
- фур'є синтез сигналу на виході

Моделі середовищ із дисперсією

Закон дисперсії: $k(\omega) = \frac{\omega}{c} \cdot n(\omega)$

Користуючись умовою вузької смуги, можна розкласти хвильове число в ряд Тейлора по степенях ч-ти:

поблизу ω_0 — відлік частот тут відбувається відносно ω_0

$$k(\omega) = k_0 + \omega k_0' + \frac{1}{2}\omega^2 k_0'' + \dots$$

введемо позначення:

$$k_0 = k(0);\quad k_0' = \left.\frac{\partial k}{\partial \omega}\right|_0;\quad k_0'' = \left.\frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2}\right|_0$$

Будемо користуватись:

1) моделлю <u>середовища з дисперсією I порядку</u>:
$$k(\omega) = k_0 + \omega k_0'$$

2) моделлю <u>середовища з дисперсією II порядку</u>:
$$k(\omega) = k_0 + \omega k_0' + \frac{1}{2}\omega^2 k_0''$$

Середовище з дисперсією I порядку.

Фазова і групова швидкості:

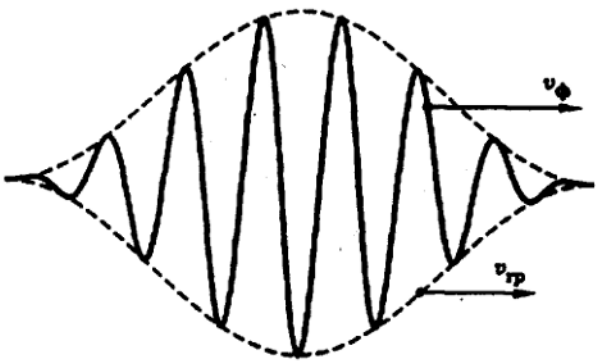
Швидкість розповсюдж. імп $u = v_{гр} = \left.\frac{\partial \omega}{\partial k}\right|_0$

$$v_ф = \frac{\omega_0}{k_0} = \frac{c}{n(\omega_0)} \qquad v_{гр} = \frac{v_ф}{1 + \frac{\omega}{n}\cdot\frac{\partial n}{\partial \omega}}$$

Можна показати, що:

В середовищі з дисперсією I порядку світловий імпульс з вузькою смугою розповсюдж БЕЗ зміни форми

85



$$v_{гр} < v_ф$$

Для вакууму $n = 1$

$$v_{гр} = v_ф$$



Середовище із дисперсією II порядку. Дисперсія групової швидкості

$$v_{гр} = v_{гр}(\omega) \qquad \frac{1}{v_{гр}} = \frac{\partial k}{\partial \omega} = k_0' + k_0'' \cdot \omega$$

1. Утворення імпульсів із стійкою формою огинаючої - спектронів.

Можна показати, що в дальній зоні дисперсії ($z \gg z_{дисп}$) світлові імпульси набувають стійкої форми, яка визначається спектром вхідного імпульсу. Такий імпульс називається „спектроном".

$$z_{дисп} = \frac{\tau_0^2}{2\pi k_0''}$$

2. Саме дисперсія $v_{гр}$ призводить до розпливання світлового імпульсу.

Існує зв'язок: $\tau_0 \cdot \Delta\omega = 2\pi$

86

20

В дальній зоні ($z >> z_{дисп}$):

$$\boxed{\tau_u(z) = \Delta\omega \cdot k_0'' \cdot z} \qquad (A)$$

З (А) витікає, що $\tau_u(z)$ лінійно зростає по мірі збільшення z. Це і є дисперсійне розпливання імпульсу.

Обидва ефекти (утворення „спектрашу" і розпливання імпульсу) в дальній зоні можна пояснити за допомогою аналогії із бігунами на довгу дистанцію.

Для зручності (А) можна записати так:

$$\boxed{\tau_u(z) = \tau_0 \frac{z}{z_{дисп}}}$$

Приклад: опт. волокно; $\lambda = 1$ мкм; $k_0'' = 3 \cdot 10^{-28}$ с^2/см $\tau_0 = 10^{-12}$ с. Можна розрахувати $z_{дисп}$:

$z_{дисп} = 5$ м.

Якщо довжина волокна $z = 50$ м, то імпульс на виході буде мати тривалість $\tau_u(z) = 10^{-11}$ с, тобто він прийде із 10-тикратним розпливанням.

Якщо на вході прямокутний імпульс τ_0, то інтенсивність в дальній зоні має вигляд

$$J(t) = J_{max} \cdot \operatorname{sinc}^2\left[\frac{\pi\theta}{\tau_u(z)}\right], \text{ де } \theta = t - k_0' \cdot z$$



89

Глибина проникнення світла у середовище з провідністю

Нехай показник $\exp$ в законі Бугера $\frac{2\omega\chi}{c}\,x = 1 \Rightarrow$

$d = \frac{c}{2\omega\chi}$ – це глибина (d), на якій інтенсивність світла зменшується в e разів: d – товщина скін-шару. Наприклад, для міді

λ	1000 Å (УФ)	10 мкм (ІЧ)	10 см (НВЧ)
d	6.2 Å	62 Å	6200 Å

З (8): при проходженні світла через шар металу товщиною $x = \lambda$ потік енергії послаблюється в $e^{4\pi\chi}$ разів. Для більшості металів $\chi = 1.5 - 5$.

Відбиття світла від металів

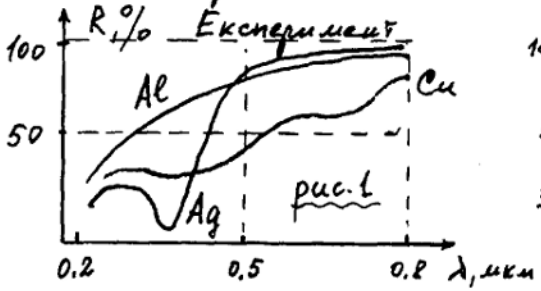


рис. 1

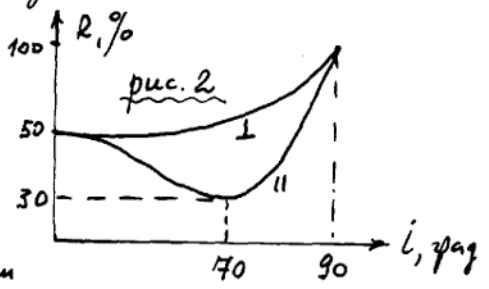


рис. 2

Рис. 2 якісно схожий на подібну залежність для діелектрика (скла). Відміни: 1) велике значення R при нормальному падінні світла на поверхню металу;
2) значення R не досягає нуля в тій ("$i = i_б$");
3) при відбитті між „p" та „s" компонентами виникає різниця фаз. Лінійно поляриз. світло при відбитті від металу стає еліптично поляризованим.

$$R = \frac{E_{відб} \cdot E^*_{відб}}{E_{пад} \cdot E^*_{пад}} = \frac{(n - i\chi - 1)(n + i\chi - 1)}{(n - i\chi + 1)(n + i\chi + 1)} = \frac{(n-1)^2 + \chi^2}{(n+1)^2 + \chi^2}$$

90

Нагадаємо, що для діелектриків $R = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2$

Для металів $\boxed{R = \frac{(n-1)^2 + \chi^2}{(n+1)^2 + \chi^2}}$ (А)

Є така наука - **еліпсометрія**. Значення R в ній визначається експериментально. Це - I рівняння.

Друге рівняння - для знаходження n та χ - рівняння стану поляризації (еліптичної поляризації). Параметри еліпсу: мала напівось, велика напівось, азимут.

Амплітудний коеф. відбиття $r = \frac{E_{відб}}{E_{пад}}$

Для нормального падіння світла із повітря на провідне середовище: $r = -\frac{n^* - 1}{n^* + 1}$

Введемо комплексний показн. заломлення (n^*):

$$r = -\frac{n - i\chi - 1}{n - i\chi + 1} \cdot \frac{n + i\chi + 1}{n + i\chi + 1} \overset{②}{=} -\frac{n^2 + \chi^2 - 2i\chi - 1}{(n+1)^2 + \chi^2} =$$

$$\overset{①}{=} -\frac{n - (i\chi + 1)}{(n+1) - i\chi} \cdot \frac{n + (i\chi + 1)}{(n+1) + i\chi} = \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{1 - n^2 - \chi^2}{(n+1)^2 + \chi^2}; \\ b = \frac{2\chi}{(n+1)^2 + \chi^2} \end{array} \right. = a + ib$$

Зсув по фазі між амплітудами пад. та відб. хвиль - $\Delta\varphi$:

$$\boxed{tg\,\Delta\varphi = \frac{1 - n^2 - \chi^2}{2\chi}} \quad (Б)$$

$tg\,\Delta\varphi = \frac{a}{b}$

Для лін. поляриз. світла $\delta_{\parallel} - \delta_{\perp} = 0 \Rightarrow tg\,\delta = 0$

Для еліптично поляриз. світла знаходять $\delta = \delta(n, \chi)$ та $R = R(n, \chi)$.



Схема еліпсометра

Значення n та χ розраховують по формулах, вимірюючи на еліпсометрі параметри еліптично поляриз. світла, відбитого від металу, (А) та (Б) - основні формули для розрахунків.

91

5

Наведеними в таблицях довідників значеннями ε та б для розрахунків n та χ ~~користуватись~~ не можна, бо вони стосуються статичних полів!

Вимірені методами еліпсометрії величини n, χ та r наведені в таблиці 1 (для $\lambda = 0.589$ мкм):

Метал	χ	n	r, %
залізо	1.63	1.51	32.6
мідь	4.26	2.06	70.1
золото	2.82	0.37	85.1
срібло	3.64	0.18	95.0
натрій	2.61	0.005	99,7

Аналіз таблиці:

1) для деяких металів $n < 1$. На таку можливість вказувалось при розгляді теми „Дисперсія світла".

2) Теоретично $n \cdot \chi = \frac{2\delta}{\nu}$ (див. (7)). Це співвідношення добре виконується в далекій ІЧ обл. Для видимого діапазону – сильне розходження. Одна з причин, пояснюючих це, полягає у тому, що при падінні на метал видимого світла помітну роль грають не тільки вільні електрони, але і зв'язані електрони.

Повернемось до моделі Лоренца, яка дозволяє обчислити компл. діел. проникність матеріалу за рахунок взаємодії ел.м. хвилі із електронами середовища.

Вже отримували, що при нехтуванні загухань електронних коливань ($\gamma = 0$), $\hat{\varepsilon}(\omega) = 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2$

де ω_p – плазмова частота $\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi N e^2}{m}}$.

ω_p – плазмова, або ленгмюрівська частота

При $N = 10^{22}$ см$^{-3}$ величина ω_p відповідає $\lambda_p = 0.3$ мкм. Для оптичного діапазону $\omega < \omega_p$ величина $\varepsilon(\omega)$ виявляється від'ємною ($\varepsilon < 0$), а комплексний показник заломл. $n^* = \sqrt{\varepsilon}$ тоді є чисто уявним.

92

Тобто: $\mathrm{Re}\sqrt{\varepsilon} = 0 \Rightarrow n = 0$.

Тому компл. показник заломл. металла $n^* = i\chi$, де χ – дійсна величина.

Тоді при нормальному падінні світла $R = \left|\frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}}\right|^2$.
Для границі повітря–метал: $\sqrt{\varepsilon_1} = 1$,
$\sqrt{\varepsilon_2} = i\chi_2$. Тому $R = 1$, тобто метал повинен повністю відбивати світло: „металевий блиск".

Чим нижче частота (чим більша λ) $\sqrt{\varepsilon}$ при $\omega < \omega_p$, тим краще відбиття. Ось чому майже всі метали при $\lambda \sim 10$ мкм мають $R \sim 100\%$.

Для деяких металів ω_p лежить у видимому діапазоні. Оскільки для $\omega > \omega_p$ величина R помітно падає, поверхня металу в цьому випадку виглядає не білою, а має колір. Так, наприклад, золото має $\lambda_p = 0.6$ мкм, тому воно слабо відбиває синє-зелене світло і добре – жовте. Для Al величина λ_p лежить в УФ. Тому Al добре відбиває видиме світло і виглядає білим.

Зауваження: 1) Закон дисперсії $\varepsilon(\omega) = 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2$ виправдовується як для металів, так і для дійсно плазми, що складається із вільних електронів та іонів.

2) При проходженні плазмової частоти ω_p (при нормальному падінні світла на поверхню металу) коеф. відбиття R повинен (принаймні, теоретично!) змінюватись стрибком від 0 до 1.

93

о.

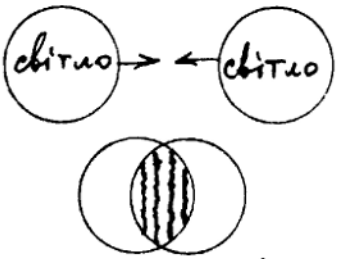
Інтерференція світла.

Основні поняття та дослідні данні

Інтерференція – хвильове явище. Ньютон: світло – потік корпускул (частинок).

І-ція досить тонке фіз. явище, яке в побутовому житті зустрічається не часто. В побуті відомі більше явища, які підпадають під закон складання (додавання) інтенсивностей (принцип суперпозиції): приклад з двома лампочками.

Принцип спостереження І-ції: два однорідних світлових пучка, які зводяться на екрані, утворюють систему темних і світлих смуг – інтерф. картину



Світло + світло = темнота

В цьому випадку – джерела залежні, пов'язані між собою – когерентні

Інтерференцію хвиль на воді спостерігали завжди
І-цію світла вперше спостерігав в 1801 р Юнг

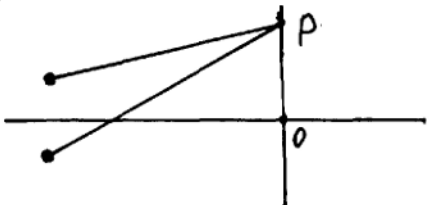


94

3) амплітуди хвиль, що інтерферують, бажано, були б однаковими.

Інтерференція двох хвиль: $\vec{E}_1 = \vec{E}_{01}(r)\cdot e^{i(\omega t - \vec{k}_1\vec{r})}$ та $\vec{E}_2 = \vec{E}_{02}(r)\, e^{i(\omega t - \vec{k}_2\vec{r})}$

(хвилі сферичні: $E_0(r)$)



$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ – принцип суперпозиції

$y = E\cdot E^*$, де E^* – комплексно спряжена до E величина:

$$y = \underbrace{\vec{E}_1\cdot\vec{E}_1^*}_{y_1} + \underbrace{\vec{E}_2\cdot\vec{E}_2^*}_{y_2} + \underbrace{\vec{E}_1\cdot\vec{E}_2^* + \vec{E}_2\vec{E}_1^*}_{\text{інтерференц. член}} \quad (1)$$

$z = \rho e^{i\varphi}$

$z^* = \rho e^{-i\varphi}$

$\vec{E}_1\cdot\vec{E}_2 = E_1\cdot E_2\cos\vec{E}_1\hat{\vec{E}}_2$. Якщо кут $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то $y = 0$. Тому взаємно перпендикулярно поляризовані хвилі не інтерферують.

Інтерфер. член $\vec{E}_1\cdot\vec{E}_2^* + \vec{E}_2\cdot\vec{E}_1^* = \vec{E}_{01}\cdot\vec{E}_{02}\, e^{i(\vec{k}_2\vec{r}_2 - \vec{k}_1\vec{r}_1)} + \vec{E}_{01}\cdot\vec{E}_{02}\, e^{i(\vec{k}_1\vec{r}_1 - \vec{k}_2\vec{r}_2)} = 2\vec{E}_{01}\cdot\vec{E}_{02}\cos(\vec{k}_1\vec{r}_1 - \vec{k}_2\vec{r}_2)$

$\vec{k}\cdot\vec{r} = \varphi$ – фаза

$\vec{k}_2\vec{r}_2 - \vec{k}_1\vec{r}_1 = \varphi_2 - \varphi_1$ – різниця фаз

$\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = \cos\varphi$ – формула Ейлера

95

Око і фотоприймачі – інерційні: 0.1 с та 10^{-10} с, відпов. ²
Опт. частота $f \cong 10^{14}$ Гц ⇒ Вираз (1) треба усереднювати:

$$\langle J \rangle = \langle J_1 \rangle + \langle J_2 \rangle + 2\sqrt{\langle J_1 \rangle \langle J_2 \rangle} \cdot \cos(k_2 r_2 - k_1 r_1)$$

Якщо різниця фаз $(\varphi_2 - \varphi_1)$ змінюється у часі, то $\langle \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \rangle = 0$ і інтерференція не спостерігається.

Тобто необхідна умова для інтерфер.: $\varphi_2 - \varphi_1 = \text{const}$

$$k_2 r_2 - k_1 r_1 = \text{const} \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_2 r_2 - n_1 r_1) = \Delta\varphi$$

$(n_2 r_2 - n_1 r_1)$ – опт. різниця ходу

Якщо $n_1 = n_2$, то $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot n(r_2 - r_1)$. Зміна $(r_2 - r_1)$ в результаті нагріву, вібрації тощо дають залежність $\Delta\varphi$ від часу, роблять інтерф. неможливою.

Позначимо: $\frac{r_2 \cdot n_2 - r_1 n_1}{\lambda} = m$ – порядок інтерференції; $m = \frac{\Delta}{\lambda}$

Величина m показує, скільки довжин хвиль (λ) вміщується в опт. різницю ходу.

Якщо $\Delta = m \cdot \lambda = 2m\frac{\lambda}{2}$ або $\Delta\varphi = 2\pi \cdot m$ } умова max

(де $m = 0, 1, 2, \ldots$), то $J = J_1 + J_2 + 2J_1^{1/2} \cdot J_2^{1/2} = J_{max}$

Якщо $\Delta = (2m+1)\frac{\lambda}{2}$ або $\Delta\varphi = (2m+1)\pi$, } умова min

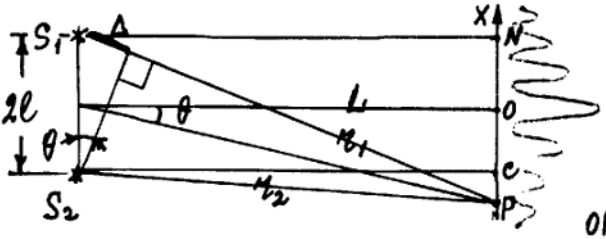
то $J = J_1 + J_2 - 2\sqrt{J_1 \cdot J_2} = J_{min}$

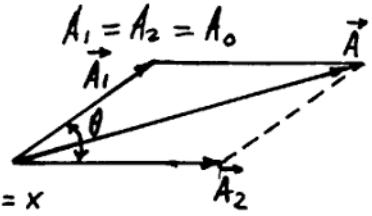
Коли $n_1 \cdot r_1 = n_2 r_2$ (або $\Delta\varphi = 0$), то шляхи називають тautохронними: світло по шляхам, які не рівні геометрично, розповсюджуються за рівні проміжки часу.

Контрастність інтерфер. картини х-ється функцією видності

$$V = \frac{J_{max} - J_{min}}{J_{max} + J_{min}} = \frac{4\sqrt{J_1 \cdot J_2}}{2(J_1 + J_2)} = \frac{2\sqrt{J_1 \cdot J_2}}{J_1 + J_2}$$

Розподіл інтенсивності світла в інтерфер. картині





$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 \cdot A_2 \cos\delta \qquad \delta = \varphi_2 - \varphi_1 = k_2 r_2 - k_1 r_1$$

1) Якщо $\langle \cos\delta \rangle = 0$ – фаза неперервно змінюється, то коливання некогерентні і $J = J_1 + J_2$

2) Якщо $J = J_1 + J_2 + 2\sqrt{J_1 J_2} \cdot \cos\delta$ коливання когерентні і інтерфер. картина спостерігається.

$$J = A^2 = 2A_0^2 + 2A_0^2 \cdot \cos\varphi = 2A_0^2(1+\cos\varphi) = 4A_0^2 \cdot \cos^2\frac{\varphi}{2}, \text{ де } \varphi = k \cdot \Delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta$$

З рис. видно, що $\sin\theta = \Delta/2l$, або $\theta \approx \Delta/2l$

$$\Delta = 2l \cdot \theta = 2l\frac{x}{L} \qquad \left(\frac{x}{L} = tg\,\theta\right)$$

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{2l \cdot x}{L} \qquad \eta = \frac{\pi \cdot 2l}{L \cdot \lambda}$$

Тоді $A^2 = 4A_0^2 \cos^2\frac{\varphi}{2} = 4A_0^2 \cos^2\frac{2l \cdot x \cdot 2\pi}{2 \cdot L \cdot \lambda} \downarrow = 4A_0^2 \cos^2 \eta x$

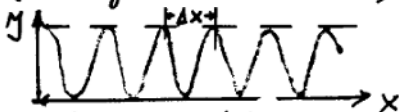
Через те, що $J \sim A^2$

$$\boxed{J = J_0 \cos^2 \eta \cdot x}$$

J_0 – інтенс. в max

Інтенсивність в min $J_{min} = 0$.

Отримано ідеалізований (теоретичний) розподіл інтенсивності $J(x)$, який відрізняється від реального (експериментального).



ΔPS_2C: $r_2^2 = L^2 + (x-l)^2$

ΔPS_1N: $r_1^2 = L^2 + (x+l)^2$

$r_1^2 - r_2^2 = 4l \cdot x = \Delta \cdot 2L$

$r_1^2 - r_2^2 = (r_1 - r_2) \cdot (r_2 + r_1)$

$\Delta \qquad \times 2L$

$$\boxed{x = \Delta \cdot L/2l}$$

$$\boxed{\Delta = \frac{2l \cdot x}{L}}$$

97

4.

Ширина інтерференційної смуги

В точці з координатою x на екрані буде max, коли $\Delta = m \cdot \lambda$. Відстань від центра інтерф. картини до максимуму m-го порядку $x_m = \frac{m \cdot \lambda \cdot L}{2\ell}$

Відстань між максимумами:

$$\boxed{\Delta x = \frac{x_m}{m} = \frac{L \cdot \lambda}{2\ell}}$$ „Правило трьох „Л""

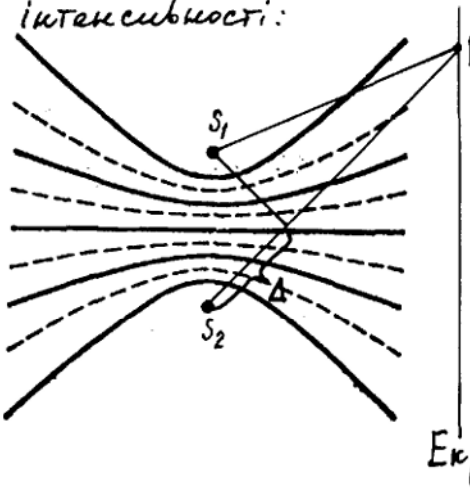
Δx – ширина інтерф. смуги ≡ відстань між сусідніми max (або min).

ℓ – мале, L – велике $\Rightarrow \frac{\ell}{L} \approx \theta$ $\quad \boxed{\Delta x = \frac{\lambda}{\theta}}$

Якщо $L = 1$ м; $\lambda = 500$ нм, $2\ell = 1$ мм, то $\Delta x = 1$ мм

Зауваження 1: Центральний max ($m = 0$) буде ахроматичним (незабарвленим): хвилі з різними λ приходять в т. P в однакових фазах ($\Delta = 0$).

Зауваження 2: Визначимо геом. місце точок, де $r_2 - r_1 = \Delta = \text{const}$ (поверхні максимальної (мінім.) інтенсивності:



Це – гіперболи (в просторі – гіперболоїди) з фокусами в т. S_1 та S_2

Суцільні лінії – геом. місце розміщення max, штрихові – min.

98

5.

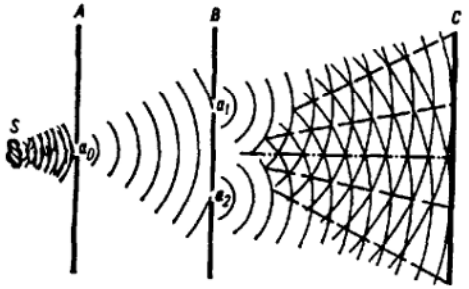
Двопроменева інтерференція

1. Класичні схеми спостереження інтерференції методом поділу фронту хвилі. (Интерференція Френеля)

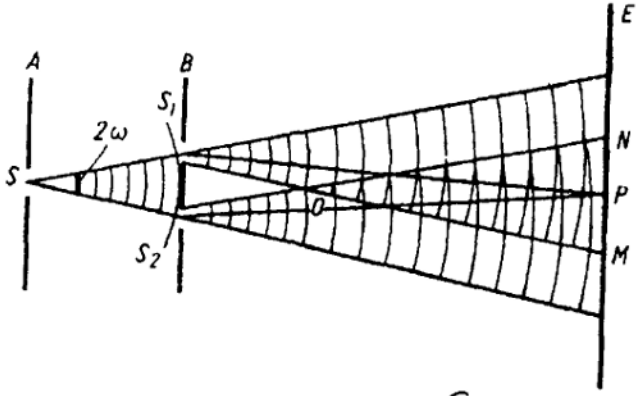
Точкове джерело дає хвилю із сферичним фронтом, який поділяється на 2, щоб потім об'єднатись для інтерференції.

Придатний тільки для достатньо малих джерел світла, які наближено можна вважати точковими.

Дослід Юнга



Додаткових лінз для спостереження інтерференц. картини не потрібно



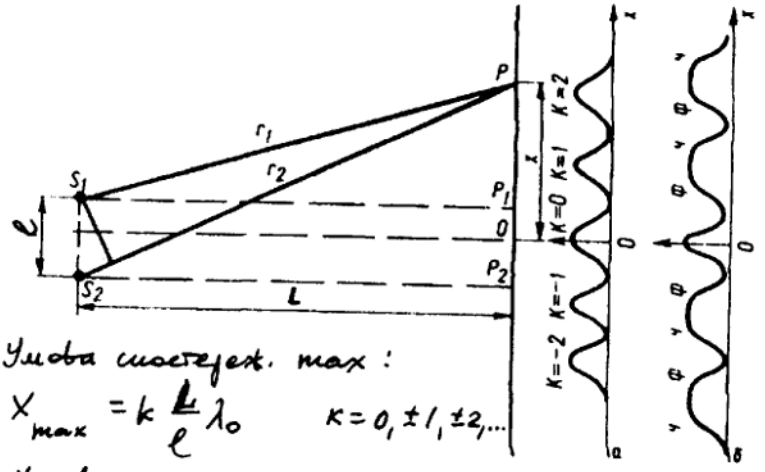
Ділянка перекриття когерентних променів від S_1 та S_2 називають полем інтерференції

1) Интерфер. картина спостерігається в будь-якій точці поля інтерфер.

2) Монохр. світло збільшує чіткість (контраст) інтерференційних смуг.

3) При збільшенні щілини S збільшується освітленість але зменшується контраст інтерф. картини.

6.



монохр. світло — біле світло

$\Delta = r_2 - r_1 = \frac{x \cdot l}{L}$

Умова спостереж. max:

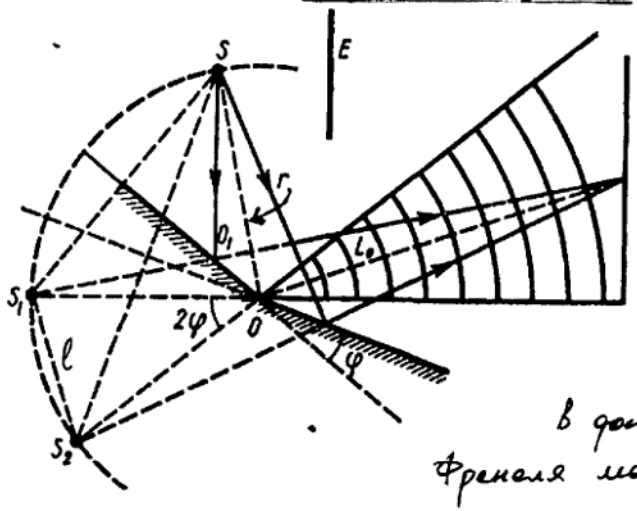
$x_{max} = k \frac{L}{l} \lambda_0 \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Умова спостереж. min:

$x_{min} = (2k+1) \frac{L}{l} \cdot \frac{\lambda_0}{2}$

Ширина інтерф. смуги $\Delta x = x_{min}(k+1) - x_{min}(k) = \frac{L}{l} \cdot \lambda_0$

Бідзеркало Френеля



(віртуальні)
S_1, S_2 – уявні джерела

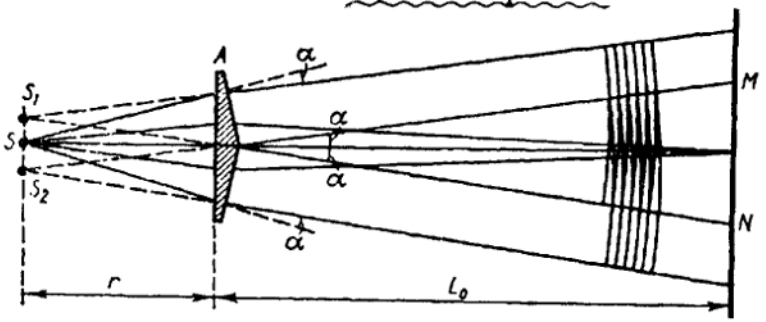
Ширина інтерф. смуги

$\Delta y = \frac{L}{l} \cdot \lambda = \frac{L_0 + r}{l} \cdot \lambda \approx \frac{L_0 + r}{2\varphi \cdot r} \cdot \lambda$

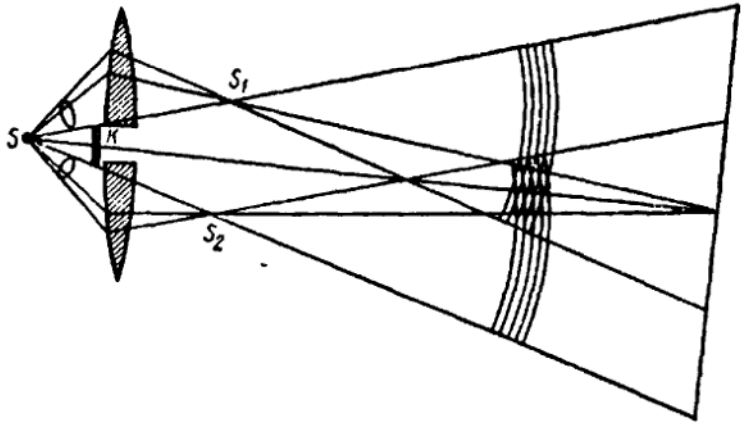
в домідах з бідзеркалом Френеля можна визначити λ:

$\lambda = \frac{2\varphi \cdot r \cdot \Delta y}{L_0 + r}$

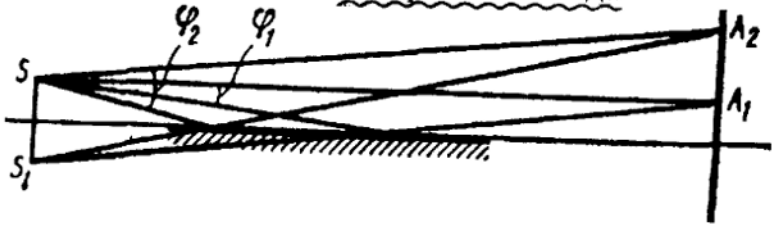
Призма Френеля



Білінза Бійе



Дзеркало Ллойда

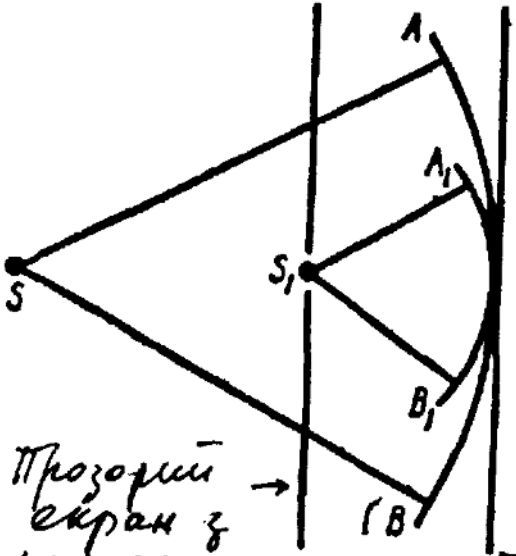


Кут падіння обирається дуже близьким до 90°, щоб відстань між когерентними джерелами була невеликою

S – дійсне джерело;

S_1 – віртуальне джерело.

Метод Вінника



Різниця ходу для променів, які проходять через прозорий екран, та променів, які проходять через отвір, $\Delta = d(n-1)$

де d - товщина екрану Ек1

Перекриття відбувається в усій області між вторинним джерелом S_1 та екраном Ек2.

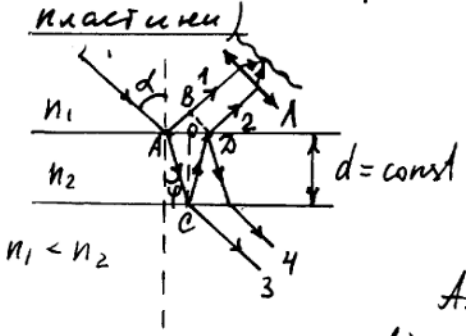
Інтерф. картина спостерігається весь час при переміщенні екрана Ек2 паралельно самому собі: інтерфер. картина – нелокалізована.

2. Методи одержання когерентних променів поділом амплітуди. (Інтерф. Ньютона)

Ці методи полягають у поділі світлового пучка напівпрозорими поверхнями, які частково відбивають і частково пропускають світло.

Вони придатні як для точкових джерел, так і для джерел скінченних розмірів.

1) Криві рівного нахилу (інтерф. від плоскопаралельної пластини)



Лінза Л – таутохронна (не вносить додаткової різниці ходу)

Промені 1 та 2 – когерентні (як і 3 та 4)

Але промені 3 та 4 сильно відрізняються за інтенсивністю

$$\Delta_{21} = \Delta = n_2(AC + CD) - n_1 \cdot AB - \frac{\lambda}{2}$$

$$AC = CD = \frac{d}{\cos\varphi}; \qquad AB = AD \cdot \sin\alpha = 2AO \cdot \sin\alpha =$$

$$= 2d \cdot tg\varphi \cdot \sin\alpha$$

$$\Delta_{21} = \frac{2n_2 \cdot d}{\cos\varphi} - \frac{2dn_1 \cdot \sin\varphi \cdot \sin\alpha}{\cos\varphi} - \frac{\lambda}{2} = \qquad (1)$$

$$= \frac{2n_2 d(1 - \sin^2\varphi)}{\cos\varphi} - \frac{\lambda}{2} = \boxed{2n_2 d\cos\varphi - \frac{\lambda}{2} = \Delta}$$

$\sin\alpha = \frac{n_2}{n_1}\sin\varphi$

Для монохр. світла. Умова спостер. max в інтерф. картині:

$$\Delta = 2m\frac{\lambda}{2} = m\lambda \quad \text{де } m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Умова спостереж. інтерф. min: $\Delta = (2m+1)\frac{\lambda}{2}$ (темна смуга)

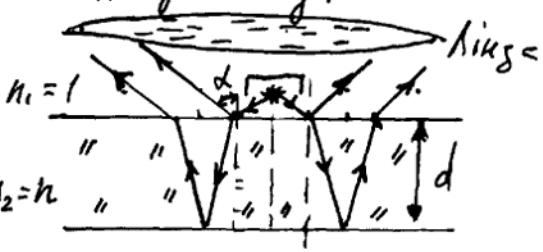
(Необх. умова спостереж. інтерф. зашмається тією *: $\Delta < L_к = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$).

про це → пізніше

10.

Із (1) видно, що Δ залежить від кута падіння світла на пластину („кута нахилу"). Тому при падінні на пластину світлового променя, що розходиться, утворюється інтерф. картина, яка називається „смугами рівного нахилу" (СРН)

Наприклад:



Зауваження:

$d = const$

1) Інтерф. картина у вигляді кілець. Кожному кільцю відповідає свій кут α.

2) СРН локалізовані в ∞: промені, що повинні інтерферувати – паралельні. Для спостереження СРН обов'язково потрібна лінза або око, акомодоване в ∞.

3) Формулу (1) можна записати не через кут заломл. φ, а через кут падіння α:

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} \pm \frac{\lambda}{2} \qquad (2)$$

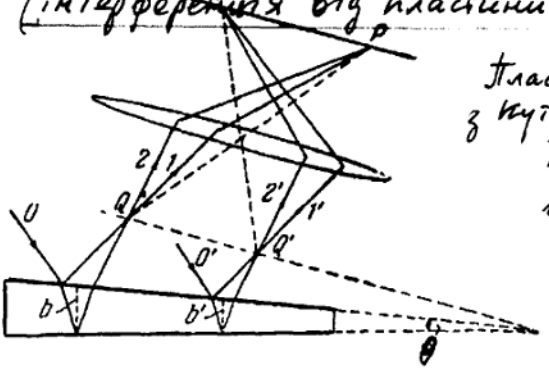
Якщо дослід проводиться не у повітрі, а у середовищі з показником заломлення n_0, то

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - n_0^2\sin^2\alpha} \pm \frac{\lambda}{2} \qquad (3)$$

4) Знак „–" обирається, коли $n > n_0$

Знак „+" обирається, коли $n < n_0$

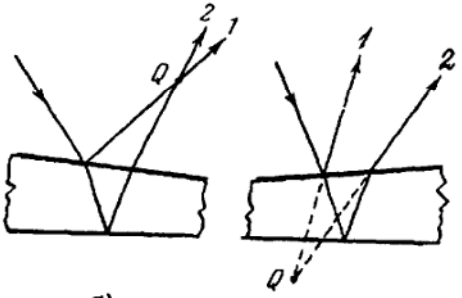
г) Криві (смуги, кільця тощо) рівної товщини. (інтерференція від пластини змінної товщини)



Пластина у вигляді клина з кутом при вершині θ

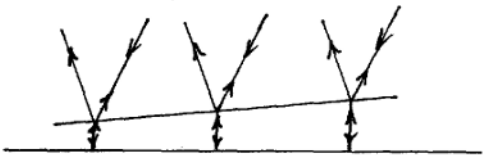
Промені 1, 2 та 1', 2', відповідно, інтерферують

При невеликих значеннях θ величину Δ можна знаходити за формулою (1), беручи за d товщину клину в місці падіння на нього променя.



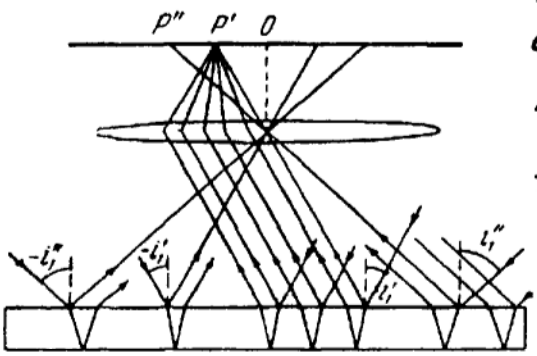
Екран з точками спостереження інтерфер. картини P та P' розташований так, щоб він був суміжним з поверхнею, яка проходить через Q та Q'. Кожна із інтерфер. смуг утворюється за рахунок відбиття від місць пластинки, які мають однакову товщину. Тому – смуги рівної товщини (СРТ).

СРТ локалізовані поблизу пластинки: над нею (а), або під нею (б). При нормальному падінні променя на пластинку (промінь 2 перпендикулярний до нижньої поверхні пластинки) СРТ локалізовані на верхній поверхні пластинки.



12.

Природа зафарбованості плівок нафти на поверхні води, мильних бульбашок, кольорів побіжалості. Порівняльний аналіз СРН та СРТ



СРН спостерігаються при освітленні плівок постійної товщини ($d = const$) розсіяним світлом, в якому містяться промені різних напрямків (кути падіння і заломлення в деяк. діап.).

СРН локалізовані в ∞.

СРТ спостерігаються при освітленні плівок несталої товщини паралельними променями світла ($i = const$). СРТ локалізовані поблизу поверхні плівки, а при норм. падінні світла – на поверхні плівки.

В реальних умовах змінюються як товщина так і кути i. В цих випадках спостерігаються криві (або смуги) змішаного типу.

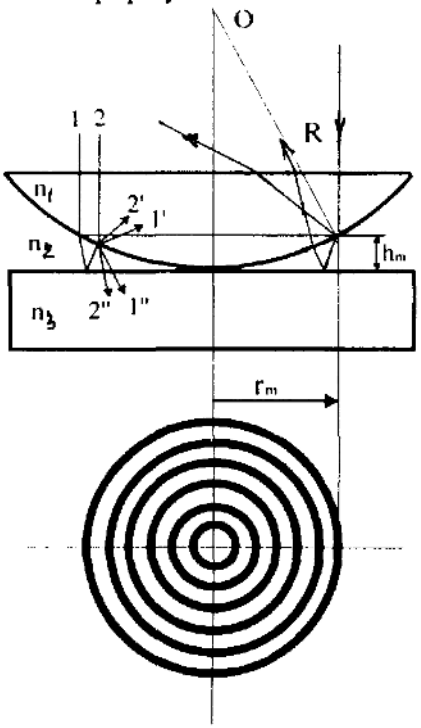
Зауважимо, що інтерф. на плівках можна спостерігати не тільки у відбитому, але і в проходящому світлі.

13

Кільця Ньютона

Двопроменева інтерференційна картина у вигляді концентричних кільцевих смуг (*кільця Ньютона*) може бути утворена за допомогою установки, схема якої представлена на рис.

Радіуси світлих і темних кілець Ньютона визначаються за такими формулами:



- В світлі, що відбивається:

$$r_m^l = \sqrt{\frac{R}{n_2}(2m-1)\frac{\lambda}{2}}; \qquad (1)$$

$$r_m^d = \sqrt{\frac{R}{n_2}m\lambda}; \qquad (2)$$

- В світлі, що проходить:

$$r_m^l = \sqrt{\frac{R}{n_2}m\lambda}; \qquad (3)$$

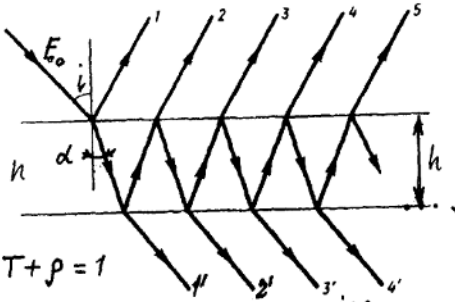
$$r_m^d = \sqrt{\frac{R}{n_2}(2m-1)\frac{\lambda}{2}}, \qquad (4)$$

де R – радіус кривизни поверхні лінзи; n_2 – показник заломлення середовища у зазорі між лінзою і пластиною; m = 1,2, . . . – порядковий номер кільця; λ – довжина хвилі монохроматичного світла.

Кільця Ньютона – частковий випадок кривих рівної товщини.

14.

Багатопроменева інтерференція



$\Delta\varphi = k\cdot\Delta$

$\Delta = 2h\cdot\cos\alpha\cdot n$

$\frac{\lambda}{2}$ „зникає" через подвійне відбиття

Всі отримані промені – когерентні (отримані із одного променя)

$$E_{пр} = E_0T\left(1 + \rho e^{-i\Delta\varphi} + \rho^2 e^{-2i\cdot\Delta\varphi} + \ldots + \rho^{N-1}e^{-i(N-1)\Delta\varphi}\right) =$$

$$= \frac{E_0T}{1-\rho e^{-i\Delta\varphi}}$$

Сума членів збіжної геом. прогресії з кореф. прогресії $q = \rho e^{-i\Delta\varphi}$

$I = E\cdot E^*$

$$I_{пр} = \frac{E_0^2T^2}{(1-\rho e^{-i\Delta\varphi})(1-\rho e^{i\Delta\varphi})} = \frac{E_0^2T^2}{1+\rho^2 - \rho e^{i\Delta\varphi} - \rho e^{-i\Delta\varphi} + 2\rho - 2\rho} =$$

$$= \frac{E_0^2T^2}{(1-\rho)^2 + 2\rho(1-\cos\Delta\varphi)} =$$

$$-\rho\left(e^{i\Delta\varphi} + e^{-i\Delta\varphi}\right) = -2\rho\cos\Delta\varphi$$

$$= \frac{E_0^2T^2}{(1-\rho)^2 + 4\rho\sin^2\frac{\Delta\varphi}{2}} = I_{пр\varphi} \quad (A)$$ Формула Ейрі

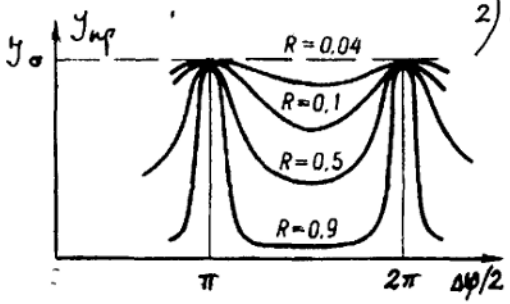
Аналіз (A): 1) $I_{пр.max}$, якщо $\sin\frac{\Delta\varphi}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\Delta\varphi}{2} = m\cdot\pi \Rightarrow$

$\Delta\varphi = 2m\cdot\pi \Rightarrow I_{пр.max} = \frac{E_0^2T^2}{(1-\rho)^2} = \frac{E_0^2T^2}{T^2} = E_0^2 \neq f(\rho)$

$I_{пр.min}$, якщо $\frac{\Delta\varphi}{2} = (2m+1)\cdot\frac{\pi}{2} \Rightarrow \Delta\varphi = (2m+1)\pi$

$I_{пр.min} = \frac{E_0^2T^2}{(1+\rho)^2} \Rightarrow I_{пр.min} \neq 0;$

15.

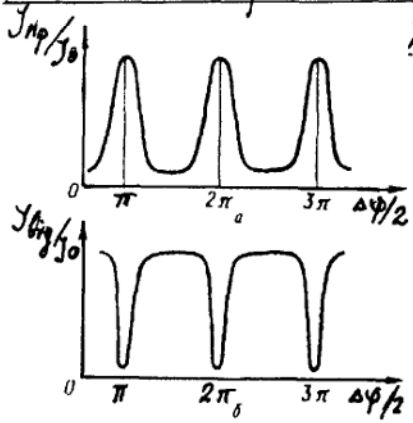


2) Контрастність інтерф. картини: $\frac{J_{max}}{J_{min}} = \left(\frac{1+\rho}{1-\rho}\right)^2$

3) Контрастність залежить від ρ!

4) Залежність інтенсивності $J_{інт}$ від $\Delta\varphi$ має систему max-ів, форма яких істотно відрізняється від вигляду кривих $\sim \cos^2\Delta\varphi$, що характеризують картину двопроменевої інтерференції хвиль.

5) $J_{інтерф.}$ картина у світлі, що проходить, має вигляд світлих смуг на темному фоні.



Для відбитого світла формула Ейрі:

$$J_{відб} = \frac{4E_0^2\rho\sin^2\frac{\Delta\varphi}{2}}{(1-\rho)^2+4\rho\sin^2\frac{\Delta\varphi}{2}} \quad (5)$$

1) У відбитому світлі інтерф. картина має вигляд темних смуг на широкому світлому фоні.

2) „Смуги" являють собою кільця рівного нахилу. Спостерігати їх треба у фокальній площині лінзи, бо СРН локалізовані на ∞.

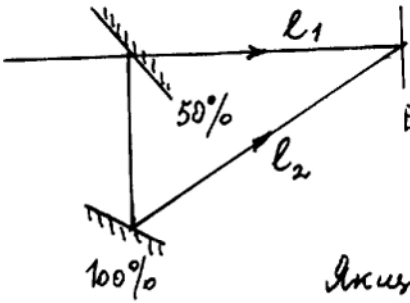
3) Важливо, щоб пластинка, на якій спостерігається багатопроменева інтерф., мала тіні поглинання!

Когерентність світла

К.с.-хар-ка упорядкованості структури світла, ступінь наблйженості світл. поля до ідеальної гармонічної хвилі. К.с. – здатність світла до інтерференції.

Розрізняють 2 види когерентності – просторову і часову.

Часова когерентність. Час когерентності. Довжина когерентності.



Для інтерф. в т. P двох променів необхідно, щоб

$$\varphi_1(t_1) - \varphi_2(t_1 + \tau_{запр}) = const$$

весь час спостереження.

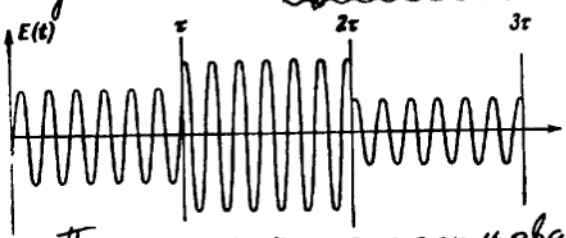
Якщо τ – час спостереж. м.б. будь-яким, то кажемо про 100% когерентність у часі. Якщо величина τ обмежена, то маємо часткову часову когерентність.

Час когерентності – $\tau_к$: $\boxed{\varphi_1(t_1) - \varphi_2(t_1 + \tau_к) \leq \pi}$

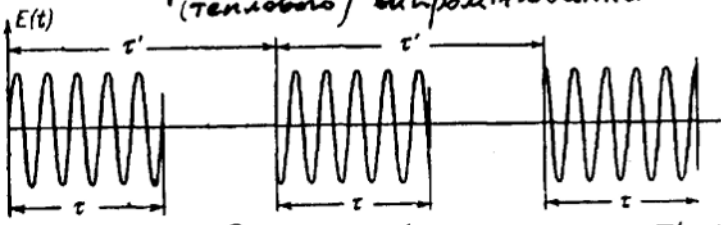
Через немонохр. світла ідеальної часової когер. ($\tau_к \to \infty$) немає. При випромінюванні світла ізольованими атомами виділяється цуг хвиль. Час випромінювання 1-го цугу і є час когерентн.

На початку кожного цугу випадково змінюються фаза і ампл. коливань. Тоді $\tau_к \sim 10^{-8}$ с

(дивися „Клас. теорія випром." – лекція 7).



Приклад хаотично модульованого (теплового) випромінювання



Ускладнена модель коливань окр. електрона

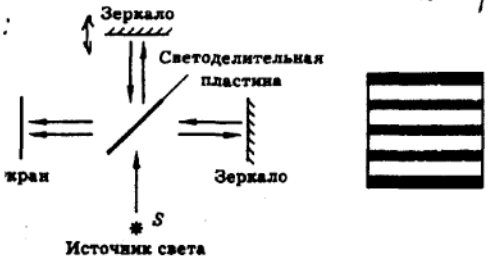
6.

Ще один спосіб пояснення часу когерентн.: $\tau_к$ – це час затримки, необхідний променю, щоб пройти відстань, рівну різниці ходу променів – $\tau_к = \frac{\Delta}{c}$

1) $\Delta = \tau_к \cdot c = 10^{-8} \cdot 3 \cdot 10^8 = 3$ м для теплових джерел

$\Delta = L_к$ – довжина когерентності.

Інтерферометр Майкельсона:



Треба враховувати ще зіткнення атомів, рух атомів тощо.

Тоді $\tau_к \sim 10^{-9} \div 10^{-10}$ с.

$L_к = 3 - 30$ см

2) Для лазерів $\Delta\nu \sim 10^2 с^{-1}$

Тоді $\tau_к = 10^{-2}$ с

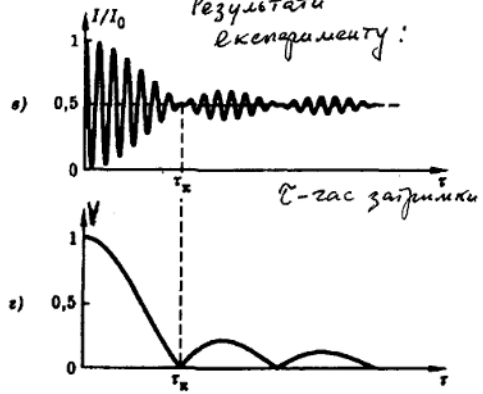
$L_к = 10^6$ м!

Реально на лазерах вдається спостерігати інтерф. при $\Delta \sim$ декілька км.

Обмеження – за рахунок неоднорідності земної атмосфери та вібрацій.

а) б)

Результати експерименту:



Інтерференція може спостерігатись у випадку, коли

$$\Delta \leq L_к$$

3) Вплив монохроматичності світла на часову когерентність променів

Джерелом світла будемо вважати збуджений ізольований атом.

Рівняння осцилят. $m\ddot{x} + kx + \beta\dot{x} = 0$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \gamma\dot{x} = 0$$

Розв'язок: $x = x_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cdot e^{i\omega t}$, де $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$

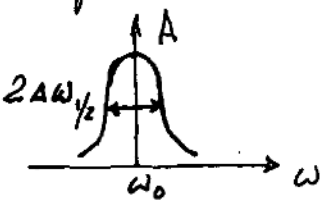
В курсі механіки при розгляді АЧХ було строго доведено, що ширина рез. кр. на напіввисоті АЧХ ($2\Delta\omega_{1/2}$) зв'язана з γ-декрементом загухання

$$\Delta\omega_{1/2} = \gamma.$$

Крім того, $\gamma = 1/\tau$, де τ – час релаксації.

Тому: $\Delta\omega_{1/2} \cdot \tau = 1$. $\Rightarrow$ Монохроматичність світла більша ($\Delta\omega_{1/2}$ менша) у тих хвиль, у яких тривалість цугу більша ($\tau \uparrow$).

В нашому випадку $\Delta\omega_{1/2}$ – радіаційна (природна) ширина лінії випромін. (~ МГц)



$$\tau \cdot \Delta\nu = \frac{1}{2\pi}$$

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \Rightarrow \Delta\nu = \frac{c}{\lambda^2} \cdot \Delta\lambda$$

$$\Delta\lambda \sim 10^{-3}\ \text{Å}$$

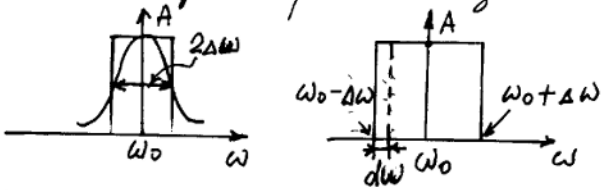
$$m_{max} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{5 \cdot 10^3}{10^{-3}} = 5 \cdot 10^6 \text{ смуг!}$$

Але при цьому не враховувалося: 1) атом не ізольований: відбуваються зіткнення і уширення $\Delta\omega_{1/2} \sim 10$ МГц; 2) атом рухається $\Rightarrow$ ефект Доплера $\Rightarrow \Delta\omega_{1/2} \sim 1500$ МГц – осн. внесок в уширення спектр. лінії; 3) є ще механізми уширення: ефект Зеемана та еф. Штарка $\Rightarrow$ розщеплення спектр. лінії.

112

8.

Візьмемо джерело, в якому лінія випромінюв. замінена прямокутником з тією ж напівшириною



Інтенсивність джерела, яке має лінію випромін. у вигляді прямокутника шириною $2\Delta\omega$, дорівнює $\frac{J_0}{\Delta\omega_{1/2}} \cdot d\omega$. Для 2-х променевої інтерференції:

$$J = J_1 + J_2 + 2\sqrt{J_1 \cdot J_2} \cdot \cos\Delta\varphi$$

$$\Delta\varphi = k \cdot \Delta = \frac{2\pi}{\lambda_0}(r_2 - r_1)$$

$$J = 2J_1(1 + \cos k \cdot \Delta), \quad \text{якщо } J_1 = J_2$$

$$J = \frac{2J_0}{\Delta\omega_{1/2}} \cdot d\omega \left(1 + \cos\frac{\omega}{c} \cdot \Delta\right) = \frac{2J_0}{\Delta\omega_{1/2}}(1 + \cos\omega\tilde{\tau}_k)\,d\omega$$

$$J = \int_{\omega_0-\Delta\omega}^{\omega_0+\Delta\omega} 2\frac{J_0}{\Delta\omega_{1/2}}(1+\cos\omega\tau)\,d\omega = 2J_0 + \frac{2J_0}{\Delta\omega_{1/2}} \cdot \frac{1}{\tau}\sin\omega\tau\Big|_{\omega_0-\Delta\omega}^{\omega_0+\Delta\omega} =$$

$$= 2J_0 + \frac{2J_0}{\tau \cdot \Delta\omega_{1/2}}\left[\sin(\omega_0+\Delta\omega)\tau - \sin(\omega_0-\Delta\omega)\tau\right] =$$

$$= 2J_0\left(1 + \frac{2}{\Delta\omega_{1/2}\cdot\tau}\sin\frac{\Delta\omega_{1/2}\cdot\tau}{2} \cdot \cos\omega_0\tau\right) =$$

$$= 2J_0\left(1 + \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\Delta\omega_{1/2}\cdot\tau\right)}{\frac{\Delta\omega_{1/2}\cdot\tau}{2}} \cdot \cos\omega_0\cdot\tau\right)$$

$\frac{\sin\alpha}{\alpha}$, де $\alpha = \frac{\Delta\omega_{1/2}\cdot\tau}{2}$

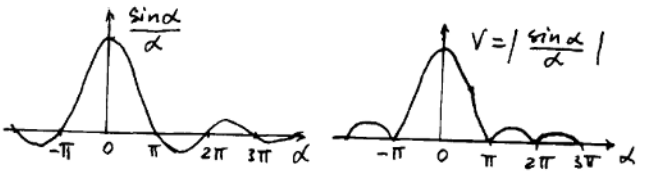
V – видність інтерфер. картини:

$$V = \frac{J_{max} - J_{min}}{J_{max} + J_{min}}$$

$$J_{max} = 2J_0(1 + \sin\alpha/\alpha)$$

$$J_{min} = 2J_0(1 - \sin\alpha/\alpha)$$

$$\boxed{V = \frac{\sin\alpha}{\alpha} \neq 1}, \quad \text{коли } J_1 = J_2 !$$



Подібна закономірність характерна і для інших контурів спектральної лінії випромінювання

$$\frac{\Delta\omega_{1/2}\cdot\tau}{2} = \pi \Rightarrow \Delta\nu_{1/2}\cdot\tau = 1 \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{1}{\Delta\nu_{1/2}}}$$

τ – час затримки одного цуга відносно іншого

$$\Delta\nu_{1/2} = \Delta\nu_{\text{зіткн}} + \Delta\nu_{\text{приб.}} + \Delta\nu_{\text{допл.}} + \ldots \Rightarrow \tau \ll 10^{-8}\,c$$

$$\nu = \frac{c}{\lambda}$$

$$d\nu = -\frac{c}{\lambda^2}\,d\lambda$$

$$\Delta\nu = \frac{c}{\lambda^2}\cdot\Delta\lambda$$

$$\boxed{L_к = c\cdot\tau_к = c\cdot\frac{1}{\Delta\nu_{1/2}} = \frac{c}{\frac{c}{\lambda^2}\cdot\Delta\lambda_{1/2}} = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda_{1/2}}}$$ – довж. когер.

Для спостереження інтерф. необхідно, щоб

$$\Delta < L_к = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda_{1/2}}.$$ Приклад:

$\Delta\lambda = 100\,Å$; $\lambda = 5000\,Å \Rightarrow L_к = 25$ мкм

Максимальний порядок інтерференції (m_{max}) обумовлений max різницею ходу: $\Delta_{max} = L_к$

$$m_{max}\cdot\lambda = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \Rightarrow m_{max} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$$

Ще раз про визначення часу когерентності:

Часову когерентність якісно можна визначити, як

1) інтервал часу, на протязі якого фаза хвильового руху послідовно змінюється передбаченим чином при проходженні хвилі фіксованої точки простору.

Більш кількісно $\tau_к$ визначають як

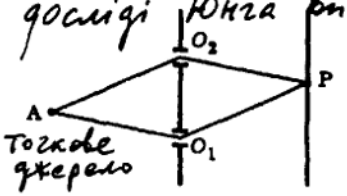
2) проміжок часу, на протязі якого випадкові зміни фази хвилі в даній точці простору досягають значення порядку π.

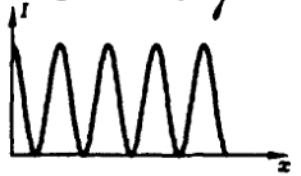
114

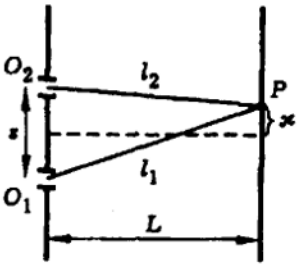
10.

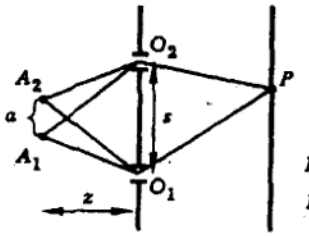
Просторова когерентність

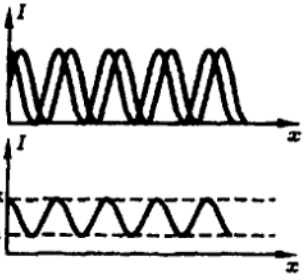
1. Результати експерименту. Як розмір джерела в досліді Юнга впливає на видність інтерфер. картини:







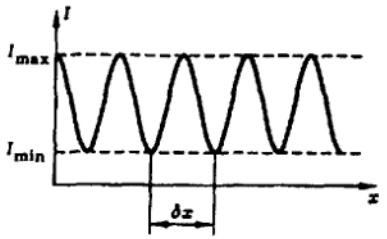


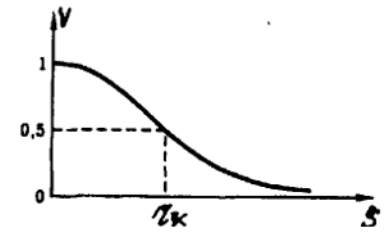


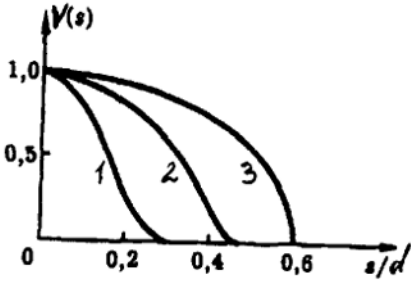




а) б)



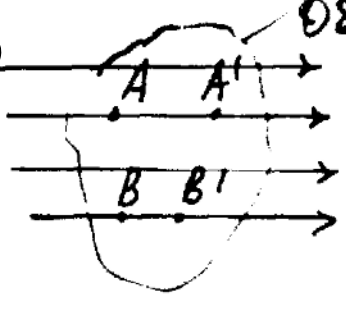




d-діаметр лазерного променя

1, 2, 3 – відносяться до різних типів лазерів

Просторова когерентність світлового поля означає, що різниця фаз коливань в різних довільно взятих точках простору не залежить від часу і є величиною сталою.



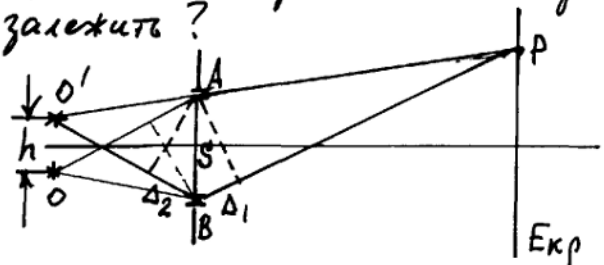
Обл. когерентності $\varphi(A) - \varphi(A') = \varphi(B) - \varphi(B') \neq f(t) = const$

Два джерела, розміри і взаємне розташування яких дозволяють спостерігати інтерф. картину (при необхідному ступеню монохроматичності світла) називаються просторово когерентними.

116

Умова просторової когерентності

Якими повинні бути розміри джерела, щоб інтерф. картина спостерігалась? Від яких параметрів це залежить?



S - відстань між отворами A та B

$\Delta_1 < L_к = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$

При зміщенні джерела з т.O в т.O' на відстань h з'являється додаткова різниця ходу Δ_2

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 \cdot I_2} \cdot \cos k(\Delta_1 + \Delta_2)$$

На екрані спостерігаються 2 інтерф. картини.

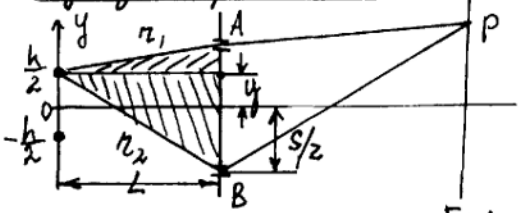


Коли $\Delta_2 \cdot k = \pi$ картинка зникає (потім знову з'являється).

$$\Delta_2 \cdot k \equiv \Delta_2 \cdot \frac{2\pi}{\lambda} < \pi$$

$$\boxed{\Delta_2 < \frac{\lambda}{2}}$$ - умова спостереження інт. картини від джерела довжиною h

Як розподіляється інтенсивність в інт. картині у випадку застосування не точкового (з кінечними розмірами) джерела



I_0 - інтенс. джерела висотою h

Розіб'ємо умовне джерело на смуги шириною dy

$\frac{I_0 \cdot dy}{h}$ - інт. випром., що випромінюється смугою dy

Через отвори A та B проходить світло, яке має початкову різницю фаз $\Delta\varphi = \Delta_1 \cdot k$

Інтенс. світла в т. P від смуги dy

$$dJ_p = \underbrace{K_1 \frac{J_0}{h} dy}_{\text{інтенс. від A}} + \underbrace{K_2 \frac{J_0}{h} dy}_{\text{інтенс. від B}} + 2\sqrt{K_1 \cdot K_2}\,\frac{J_0}{h}\cos(k\Delta_1 + k\cdot\Delta_2)\,dy$$

$$J_p = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dJ_p$$

$$\begin{cases} r_1^2 = L^2 + \left(\frac{S}{2} - y\right)^2 \\ r_2^2 = L^2 + \left(\frac{S}{2} + y\right)^2 \end{cases}$$

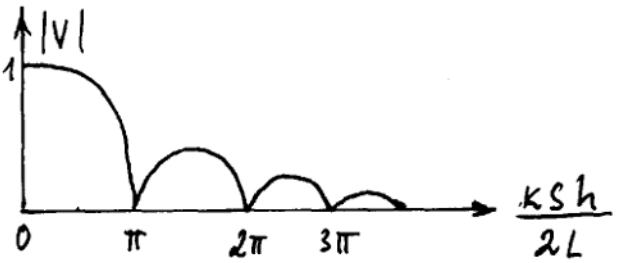
$$\underbrace{(r_2 - r_1)}_{\Delta 2}\underbrace{(r_2 + r_1)}_{2L} = 2Sy \Rightarrow \Delta_2 = \frac{S\cdot y}{L}$$

$$J_p = \int_{-\frac{h}{2}}^{h/2} dJ_p = J_1 + J_2 + 2\sqrt{K_1\cdot K_2}\cdot\frac{J_0}{h}\int_{-h/2}^{h/2}\cos\left(k\cdot\Delta_1 + k\,\frac{S\cdot y}{L}\right)dy$$

$$= J_1 + J_2 + 2\sqrt{K_1\cdot K_2}\cdot\frac{J_0 \sin(ksh/2L)}{\frac{KSh}{2L}}\cdot\cos k\cdot\Delta_1$$

$$V = \frac{J_{max} - J_{min}}{J_{max} + J_{min}}$$

$$\boxed{V = \frac{\sin\frac{KSh}{2L}}{\frac{KSh}{2L}}}$$



1) $V = 0$ при $\frac{KSh}{2L} = \pi$

$$K = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \frac{KSh}{2L} = \frac{2\pi Sh}{2\lambda L} = \pi \Rightarrow \frac{S\cdot h}{\lambda\cdot L} = 1 \Rightarrow$$

При умові, що $\frac{S\cdot h}{L} = \lambda$ – інтерференції немає.

2) Якщо $\frac{K\cdot Sh}{2L} = \frac{\pi}{2}$, то $V = \frac{2}{3}$

При $J_1 = J_2$: в цьому випадку $V \sim 70\%$

$\boxed{\frac{S\cdot h}{L} < \lambda}$ Умова просторової когерентності.

Реальне джерело можна вважати точковим, якщо $Sh/L \ll \lambda$

118

$\frac{h}{L} = \alpha$ – кутовий розмір джерела $\Rightarrow$ $\boxed{S \cdot \alpha < \lambda}$ Умова просторової когерентн.

$S < \frac{\lambda}{\alpha}$ – умова для відстані між щілинами

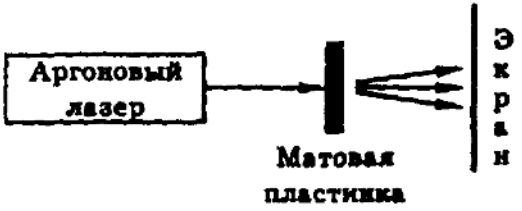
Висновки:

1. Обираючи більшу λ, можна працювати з більшими розмірами джерела (h) і з більшими величинами S.
2. Чим менша відстань L між джерелом і щілинами, тим розмір джерела повинен бути меншим.
3. Чим більша відстань S між щілинами, тим меншим повинен бути розмір джерела (h).
4. Величина джерела дає виграш у світлосилі, але – програш у просторовій когерентності.
5. Вводять поняття: радіус когерентності – як радіус перерізу променя, в межах якого виконується умова просторової когерентності $r_к = \frac{\lambda \cdot L}{h}$

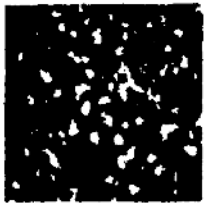
L – відстань від джерела світла до т. спостереження;
h – розмір джерела; λ – довж. світлової хвилі.
По мірі віддалення від джерела ($L\uparrow$) радіус когерент. ності зростає ($r_к \uparrow$).

- Оцінимо $r_к$ прямого сонячного світла: $L = 150$ млн км; $h = 0.7$ млн км; $\lambda = 0.5$ мкм $\Rightarrow$ $r_к = 10^{-2}$ см $= 0.1$ мм
- Для розсіяного сонячного світла (наприклад, світло в хмарний день): $L/h \approx 1$; $\lambda = 0.5$ мкм $\Rightarrow$ $r_к \sim \lambda \approx 10^{-4}$ см
- Промінь лазера може бути когерентним по всьому поперечному перерізу лазерного променя. Для отримання голограм можна використовувати широкі лазерні промені з $r_к \sim 1$ м.

Спекл-структура плями від лазерного променя - характеристика його когерентних властивостей



а)

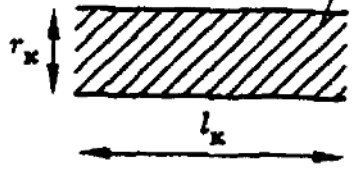


б)

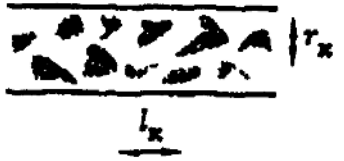
Спекли мають інтерференційне походження

Спекли свідчать про просторову когерентність вихідного променя

Некогерентне джерело спекль не утворює



а)



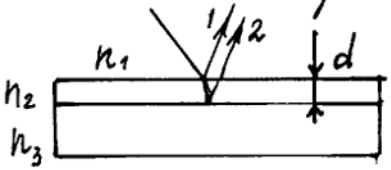
б)

Параметри $r_к$ та $L_к$ характеризують середні розміри областей простору, в межах яких хвиля має структуру, близьку до ідеально гармонічної хвилі. Можна уявити собі ідеально когерентне світло ($L_к \to \infty$, $r_к \to \infty$) – див. рис. а.

Застосування інтерференції

1. Просвітлена оптика

При нормальному падінні світла на поверхню скла відбивається 4% світла (див. формули Френеля). Опт. системи можуть складатися із десятків оптичн. елементів. Задача – зменшити долю відбитого світла



На поверхню наносять тонкий діел. шар, який може істотно зменшити відбитий потік (для визначеного діапазону $\Delta\lambda$).

$n_3 > n_2 > n_1 = 1$ (для повітря)

$$R_{12} = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 \qquad R_{23} = \left(\frac{n_2 - n_3}{n_2 + n_3}\right)^2$$

Амплітуди променів 1 та 2 мають бути однакові.

$$R_{12} = R_{23} \Rightarrow \boxed{n_2 = \sqrt{n_1 \cdot n_3}}$$

Для покриття, як правило, обирають MgF_2 ($n = 1.38$, або SiO_2

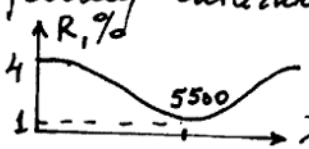
Промені 1, 2 повинні інтерферувати. Розрахуємо d:

$$2d n_2 \cos\varphi - \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} = (2m+1)\frac{\lambda}{2}$$

$\varphi = 0$ (норм. падіння) $\Rightarrow$ $2d n_2 = \frac{\lambda}{2}$ $(m=0)$

$$\boxed{d = \frac{\lambda}{4n_2} = \frac{\lambda}{4\sqrt{n_1 \cdot n_3}}}$$

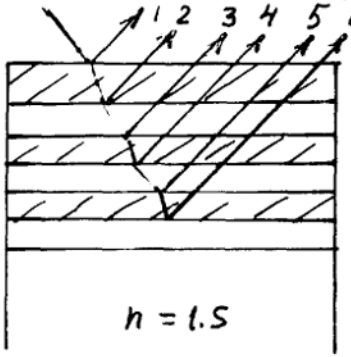
Але через те, що закони дисперсії для n_1 та n_3 різні, просвітлення оптики працює не в усьому оптичному діапазоні. Як правило, роблять в жовто-зеленому діапазоні



Роблять 3–5 шарів

121

2. Інтерференційне дзеркало (задача – обернена до задачі просвітлення оптики)



$n_1 = 2.3$ – сульфіт цинку ZnS
$n_2 = 1.32$ – кріоліт
n_1
n_2
n_1

$$d_1 \cdot n_1 = d_2 n_2 = \frac{\lambda}{4}$$

Промені 1, 2, 3, ... інтерферують між собою і підсилюють один одного $\Rightarrow$ $R = 96\%$ для 7 шарів, $R \approx 100\%$ для 11 шарів | Дзеркала для резонаторів в лазерах

Для інших λ таке дзеркало працює на пропускання

$$2dn\cos\varphi - \frac{\lambda}{2} = m\lambda \Rightarrow 2dn\cos\varphi = (2m+1)\frac{\lambda}{2}$$

$d_i \cdot n_i = \frac{\lambda}{4}$ Різна товщина для різних n_i

Чому металеве дзеркало гірше?

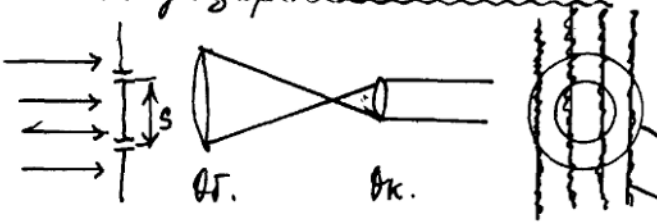
1) $R = 98\%$ відбивається, 2% – поглинається $\Rightarrow$ дзеркало нагрівається $\Rightarrow$ параметри „пливуть"
2) металеве дзеркало не селективне

Інші використання інтерференції:

3. Вимірювання розмірів віддалених тіл (напр., зоряний інтерфер. Майкельсона);
4. Визначення показн. заломл. (інтерф. Релея) Годжаєв, 111
5. Вивчення стану поверхні тв. тіл Годжаєв 104, Білий 93
6. Визначення малих кутів між поверхнями прозорих тіл Годжаєв 105, Білий 95
7. Визначення малих подовжень тіл Білий 95
8. Вивчення тонкої структури спектральних ліній Годжаєв 109-117

Вимірювання діаметра зірок

1. Дослід з двома щілинами



На оправі об'єктиву відбувається дифр.

Дифракційні кільця

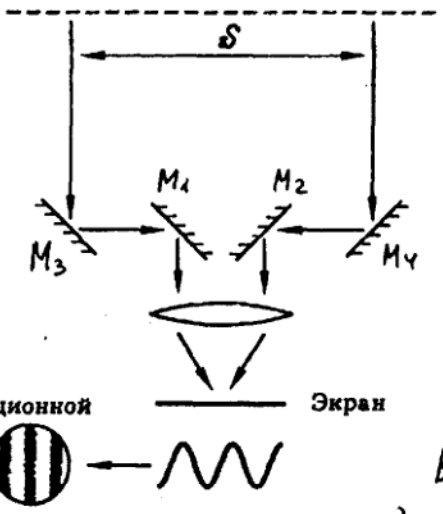
інтерференційні смуги

Вигляд вихідної картинки

Якщо щілини розсувати, то контраст інтерф. картини погіршується і при деякому значенні S (коли $S \cdot \alpha = \lambda$) картинка зникне. Таким чином вимірюючи S, можна виміряти α. Реально $S \sim 1$ м

Це - метод Фізо

2. Зоряний інтерферометр Майкельсона



Дзеркала M_1, M_2 - нерух.

M_3, M_4 - можна одночасно розсувати

Період інтерф. картини визначається відстанню між M_1 та M_2

Смуги когерентн. (видність смуг) залежить від відстані між M_3 та M_4

Вимірюють $r_к \Rightarrow$

кут. розмір зірки $\alpha = \frac{\lambda}{r_к}$ $\quad r_к \approx 10$ м $\Rightarrow$

$\alpha \approx 0.01''$. (Кут. розмір Сонця із Землі $\sim 30' \approx 10^{-2}$ рад).

Виміряний розмір зірки Бетельгейзе : $\alpha = 0.047''$.

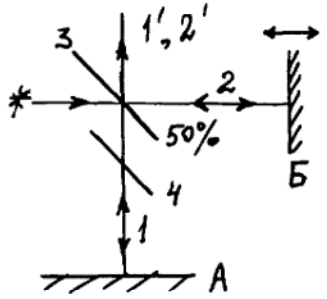
Відстань до зірки вимірюють по паралаксу $\Rightarrow D = 4 \cdot 10^8$ км

Інтерферометри

I. Двопроменеві інтерферометри

Призначення: вимірювання n, d, α (кутів), якості поверхні, λ, $\Delta\lambda$ - спектральні дослідження та дослідження когерентних властивостей джерела.

а) Інтерферометр Майкельсона



Може працювати в режимах СРН та СРТ

1) СРН: дзеркало А ⊥ дзеркалу Б

$l_1 \neq l_2 \Rightarrow \Delta = 2(l_1 - l_2)\cdot n$

Інтерф. картина у вигляді концентрич. кілець. Max порядок інтерф. - в центрі;

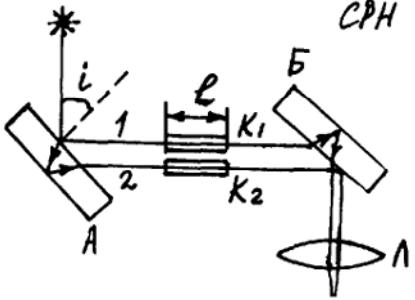
2) СРТ: дзеркала А та Б під кутом.

Зміна кута між дзеркалами створює інтерфер. картину: кільця стискаються і розширюються.

При русі дз. Б інтерф. картина може зникнути. Це відбувається, коли $\Delta = 2(l_2 - l_1) = L_к = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$.

Візуально розрізняють зміщення інтерф. картини з точністю до 1/20 смуги. У спец. випадках - до 1/1000 смуги. Це дозволяє вимірювати $\Delta l \sim 10^{-9}$ м.

б) Інтерферометр Жамена: виникає додаткова різн. ходу



СРН

$\Delta = (n_2 - n_1)\,l$

$\Delta m = \frac{(n_2 - n_1)\,l}{\lambda}$

$n_2 = n_1 + \lambda \cdot \frac{\Delta m}{l}$

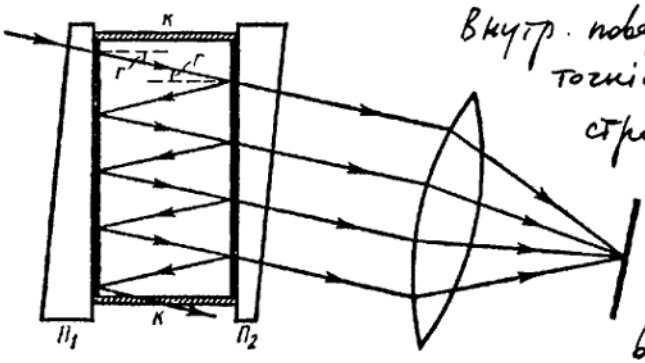
При $l = 5$ см; $\lambda = 0.5$ мкм;

$\Delta m = 0.1 \Rightarrow \Delta n = 10^{-6}$!

124

II. Багатопроменеві інтерферометри

Інтерферометр Фабрі-Перо



Внутр. поверхні оброблені з точністю до $(1/200)\lambda$ і строго паралельні одна одній, покриті тонким шаром срібла з високим коеф. відбиття – (80-95)% і незначним пропусканням. Зовнішні поверхні утворюють з внутр. поверхнями кут (1-2)'. Пластинки, як правило, мають круглу форму ф 50-60 мм. Паралельність досягається за допомогою кільця з інвару (тіп коеф. теплового розшир.) або кварцу.



Якщо відстань між відбиваючими поверхнями постійна, то такий прилад назив. еталоном Ф.-П. Якщо передбачена зміна відстані h (неперервна або набором кілець), то – спектральний прилад – інтерфер. Ф.-П. Відстань h: від 0.3 мм до 100 мм, в еталонах – до 1 м.

Характеристики: 1) Порядок інтерференції:

$2h \cdot \cos r = m \cdot \lambda$; $m_{max} = \frac{2h}{\lambda}$ для $r \approx 0$

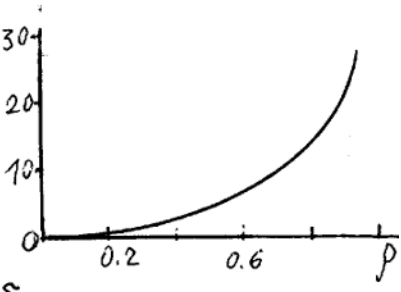
Якщо $\lambda = 500$ нм; $h = 0.5$ см, то $m_{max} = 2 \cdot 10^4$

2) Різкість інтерфер. картини $T = 1 - \rho$;

$$J_{пр} = \frac{E_0^2 T^2}{(1-\rho)^2 + 4\rho \sin^2 \delta\varphi/2} =$$

$$= \frac{E_0^2}{1 + \frac{4\rho}{(1-\rho)^2}\sin^2\frac{\Delta\varphi}{2}} = \frac{y_0}{1 + F\cdot\sin^2\frac{\Delta\varphi}{2}}$$

де $F = \frac{4\rho}{(1-\rho)^2}$ – фактор різкості



3) Ширина інтерфер. смуги

$2h\cdot\cos r = m\lambda \Rightarrow -2h\sin r\cdot\delta r = \lambda\cdot\delta m$

δr – кут між сусідніми max, якщо $\delta m = 1$

$$\boxed{\delta r = -\frac{\lambda}{2h\cdot\sin r}}$$

Чим більша h, тим менша δr (вужча інтерф. смуга)

Підвищуй h! До яких пір?

$m_{max} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$. З іншого боку $m_{max} = \frac{2h}{\lambda}$

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{2h}{\lambda} \Rightarrow h = \frac{\lambda^2}{2\Delta\lambda}$$

4) Область вільної дисперсії – спектр. інтервал, в якому можна спостерігати інтерфер. картину ($\Delta\lambda$)

$L_к = m_{max}\cdot\lambda = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \Rightarrow \Delta\lambda = \frac{\lambda}{m_{max}}$

Якщо $\lambda = 500$ нм; $m_{max} = 2\cdot10^6$, то $\Delta\lambda = 0.25$ Å! Це для $h = 5$ см. При збільшенні h величина $\Delta\lambda$ не зменшується! Але на вході інтерфер. Ф.-П. треба ставити фільтр, монохроматор або лазер.

5) Кутова дисперсія: $\mathcal{D}_\alpha = \frac{d\alpha}{d\lambda}$, де α – кут, який відповідає напрямку на max

$2h\cdot\cos\alpha = m\lambda$

$-2h\sin\alpha\cdot d\alpha = m\,d\lambda$

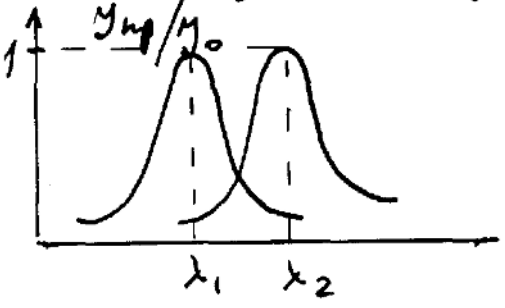
$m = \frac{2h\cdot\cos\alpha}{\lambda}$

$$\mathcal{D}_\alpha = \frac{d\alpha}{d\lambda} = -\frac{m}{2h\cdot\sin\alpha} = -\frac{1}{\lambda\cdot tg\alpha}$$

126

6) Роздільна здатність (R)

Є 2 близькі спектральні лінії: λ_1 та λ_2 ($\lambda_2 - \lambda_1 = \delta\lambda$)



$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda}$. Можна показати, що:

$$R_{max} = \frac{2h}{\lambda} \cdot \pi \cdot \frac{\sqrt{\rho}}{1-\rho}$$

R_{max} – це розд. здатність інтерф.

Врахування обмеженої апертури та поглинання дає зменшення $R_{max} \sim 10^6$. Тоді

$$\delta\lambda = \frac{\lambda}{R} = \frac{5000\,Å}{10^6} = 5 \cdot 10^{-3}\,Å$$

В інтерфер. Ф.-П. число променів, що інтерферують, $N \sim 30$; $m_{max} \sim 10^4 - 10^6$; $R \sim 10^5 - 10^6$

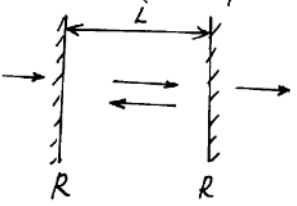
Різниця ходу $\Delta = 2h \cdot n \cdot \cos\alpha \Rightarrow \Delta_{max} = 2hn \approx$

В інтерферф. Майкельсона Δ_{max} – більша ≈ 50 см

127

Оптичний резонатор

Резонатор для лазера – варіант інтерф. Ф.-П. для $n=1$, $\alpha = 0$ (α – кут падіння).



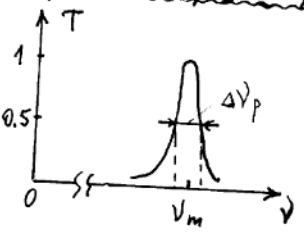
L – довжина р-ра
R – коеф. відб. по інтенсивн.
Дзеркала однакові (умовно)
$\Delta\varphi$ – набіг фази світл. хвилі за подвійний прохід через р-р.

$$\Delta\varphi = k\cdot\Delta = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot 2h\cdot n\cdot\cos\alpha =$$

$$= \frac{4\pi}{\lambda}\cdot h\cdot n\cdot\cos\alpha \Rightarrow \Delta\varphi = 4\pi\nu\cdot L,$$ де ν – част. вимір. в $см^{-1}$

Max пропускання, коли $\Delta\varphi_{max} = 2\pi\cdot m$ ($m=1,2,3\ldots$).
Дискретний набір частот $\nu_m = m\cdot\Delta\nu$, де $\Delta\nu = \frac{1}{2L}$,
на яких пропускання р-ра Ф.-П. досягає max.
ν_m – власні моди р-ра.
Для власних мод на довжині L вкладається ціле число $\lambda/2$.

Добротність резонатора.



Залежність $T(\nu)$
$\Delta\nu_p$ – ширина інтерф. max, або ширина спектр. лінії р-ра

$$Q = \frac{\nu}{\Delta\nu_p}$$

де $\nu = \frac{1}{\lambda}$ – частота світла в $см^{-1}$

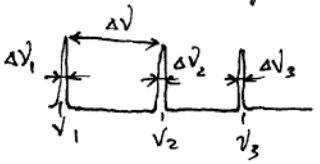
$$\Delta\nu_p = \frac{1-R}{2\pi L} \Rightarrow \boxed{Q = \frac{2\pi L}{(1-R)\cdot\lambda}}$$

$\Delta\nu_p$ – ширина інтерференц. максимуму = ширина спектр. лінії опт. р-ру

$$\Delta\nu_p = \frac{1-R}{2\pi L}$$

$(L = 0.5\,м;\ \lambda = 0.5\,мкм;\ R = 0.9) \Rightarrow \Delta\nu = \frac{1}{2L} =$
$= 10^{-2}\,см^{-1};\ \Delta\nu_p = 3\cdot10^{-4}\,см^{-1};\ Q = 6\cdot10^{7}$!

$\nu_m = m\cdot\Delta\nu$ $\quad m = 1,2,3,\ldots$
ν_m – власні моди резонатора
$\Delta\nu$ – відстань між модами резонатору



$\Delta\nu_m = \Delta\nu_p$

Дифракція світла

Дифракція пов'язана з відхиленням від прямолін. розповсюдження світл. хвиль (порівняно з напрямом, передбаченим законом геом. оптики) та з просторовим перерозподілом інтенс. світла під впливом перешкод та неоднорідностей на їх шляху.

А. Зоммерфельд: „Дифр. – будь-яке відхилення у розповсюдженні світла від прямолінійного, не пов'язане з відбиттям або заломленням."

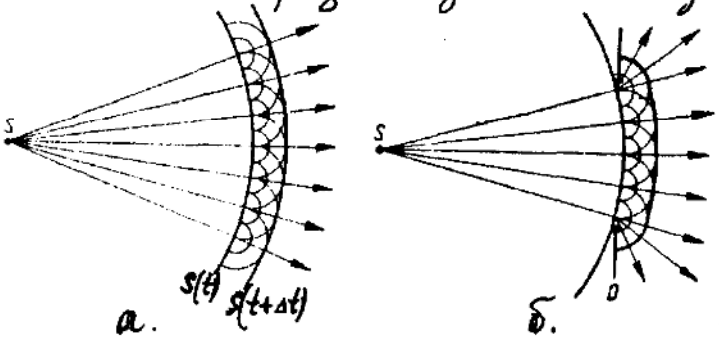
Дифракція – прояв хвильової природи світла.

Гримальді (1665 р.) описав дифр., Гюйгенс (1690 р.), Френель (1818 р.), Кірхгоф (1882 р.)

Принцип Гюйгенса: кожна т. хвил. фронту можна вважати центром вторинних елементарних світлових хвиль. Хвил. фронт у будь-який момент часу визначається як огинаюча поверхня цих елем. вторинних хвиль.

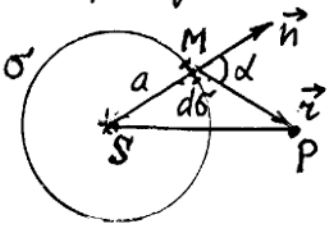
Це геом. метод побудови хвильового фронту.

О. Френель доповнив принцип Гюйг.: вторинні хвилі між собою інтерферують. Вони когерентні між собою оскільки їх фази визначаються збудженням, яке зумовлене дією одного первинного джерела.



Дифракційний інтеграл Френеля. (Математичне формулювання принципу Гюйгенса-Френеля)

Згідно до Френеля кожний елемент поверхні хвильового фронту σ випромінює вторинну хвилю.



Хвильове поле в т. P (точка спостереж.) являє собою суперпозицію вторинних хвиль і визначається інтегралом (1)

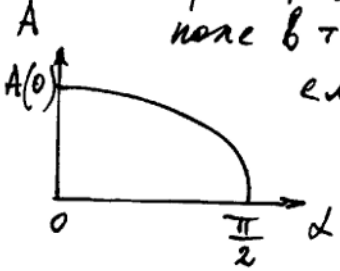
Інтеграл (1) $E(P) = \iint_{\sigma} E_0 \frac{e^{-ika}}{a} \cdot A(\alpha) \cdot \frac{1}{r} e^{-ikr} d\sigma$

$= E(M)$

де $E(P)$ та $E(M)$ - комплексні амплітуди поля

$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$. Множник $\frac{e^{-ikr}}{r}$ описує розподіл елементарної вторинної сферичної хвилі.

$A(\alpha)$ - „коеф. нахилу", змінюється від 1 до 0 при зміні α від 0 до $\pi/2$. Враховує той факт, що внесок елемента $d\sigma$ в результуюче поле в т. P залежить від орієнтації цього елементу поверхні відносно напрямку на т. P.



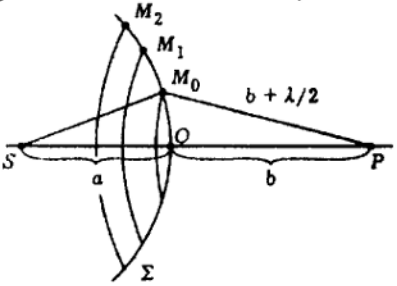
$A(0) = 1$; $A\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

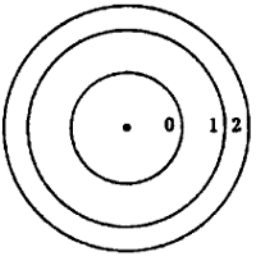
Інтеграл враховує фази вторинних хвиль, які приходять в т. P від різних елементів поверхні σ. Так враховується інтерференція вторинних хвиль.

$$E(P) = \iint_{\sigma} E(M) \cdot A(\alpha) \cdot \frac{1}{r} e^{-i(kr - \omega t + \varphi_0)} \cdot d\sigma$$

Зони Френеля

Оберемо на поверхні σ, яка в даному випадку обов'язково повинна бути сферичною, кільцеві зони так, щоб відстань від границь зони до т. спостереження P відрізнялись на $\frac{\lambda}{2}$. Края зон: $M_0, M_1, M_2, \ldots$





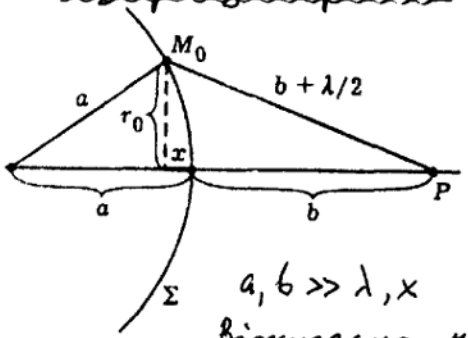
$$\begin{cases} M_0P = OP + \frac{\lambda}{2} \\ M_1P = M_0P + \frac{\lambda}{2} \\ \ldots \\ M_nP = M_{n-1}P + \frac{\lambda}{2} \end{cases}$$

т. O – центр нульової зони Фр.

Кожну зону Фр. розглядаємо, як джерело вторинних хвиль з визначеною фазою. Дві сусідні зони Фр. діють як джерела, які коливаються у протифазі.

Положення країв зон Фр. залежить від відстані до т. P

Розміри зон Френеля.



$$r_0^2 = a^2 - (a-x)^2$$

$$r_0^2 = \left(b + \frac{\lambda}{2}\right)^2 - (b+x)^2$$

$$2ax = b\lambda - 2bx + \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2$$

$a, b \gg \lambda, x$

Відкидаємо члени $\sim x^2$ та λ^2

$$x = \frac{b\cdot\lambda}{2(a+b)} \quad \text{та} \quad r_0^2 \approx 2ax \Rightarrow \boxed{r_0 = \sqrt{\frac{\lambda\cdot a\cdot b}{a+b}}}$$

Аналогічно знаходимо:

$n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\boxed{r_n = \sqrt{(n+1)\frac{\lambda\cdot a\cdot b}{a+b}}}$$

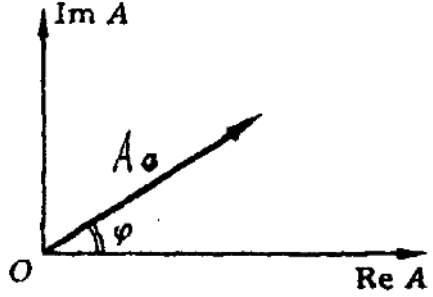
Побудова дифракційних картин графічним способом.

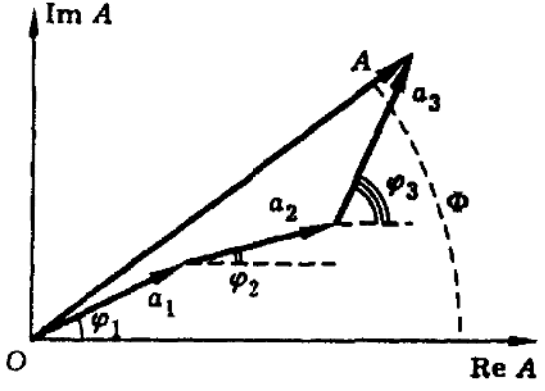
(Метод спіралі Френеля)

Векторна діаграма. Гармонічні коливання з амплітудою A_0 та фазою φ можна представити у вигляді комплексного числа $A = A_0 \exp(i\varphi)$ або вектором на площині змінних Re A та Im A (довжина вектора – A_0, кут нахилу вектора до осі Re A - φ).

$A = Re\,A + i \cdot Im\,A$

$A = A_0 e^{i\varphi}$

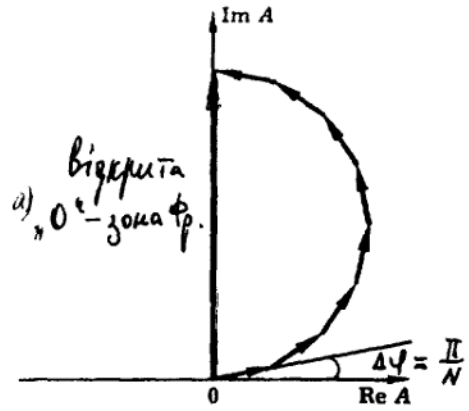




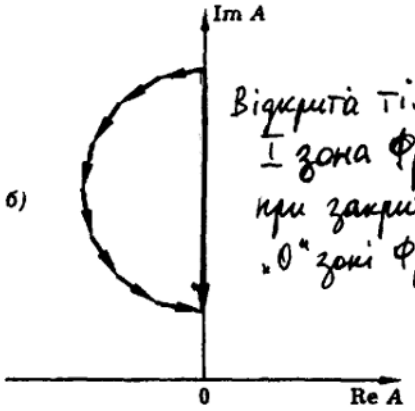
Як додати декілька гармонічних коливань частоти ω з довільними амплітудами та фазами:

132

5.

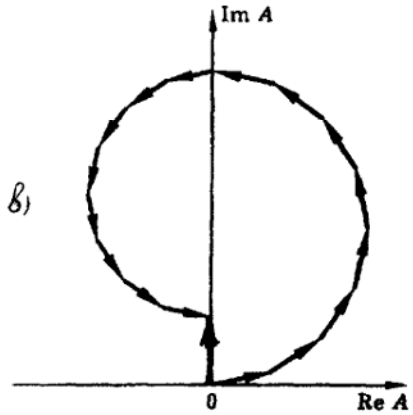


а) Відкрита „0" – зона Фр.

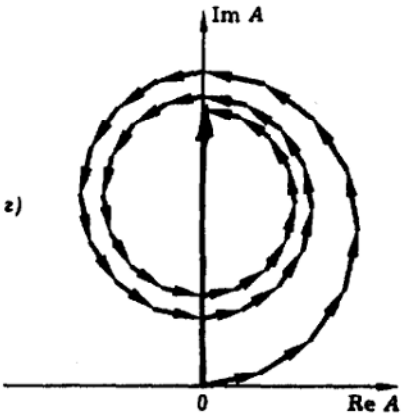


б)

Відкрита тільки I зона Френеля при закритій „0" зоні Фр.



в)

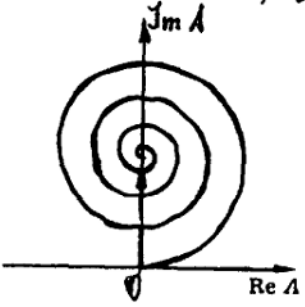


г)

Відкриті „0" та „I" зони Фр.

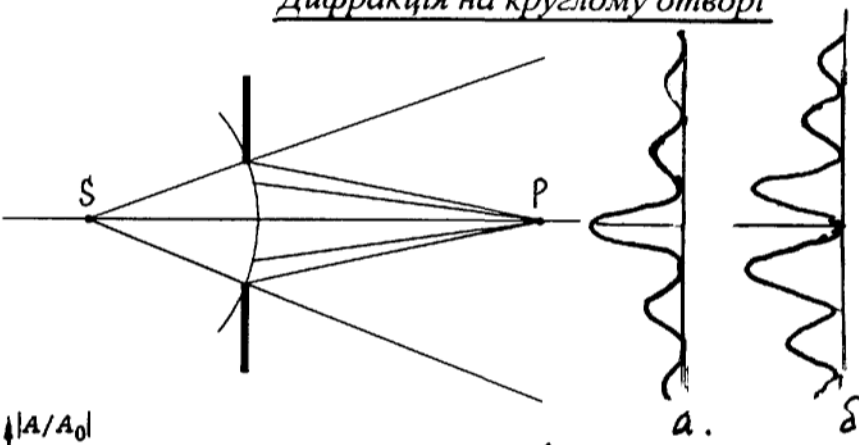
Відкрито 5 зон Фр.

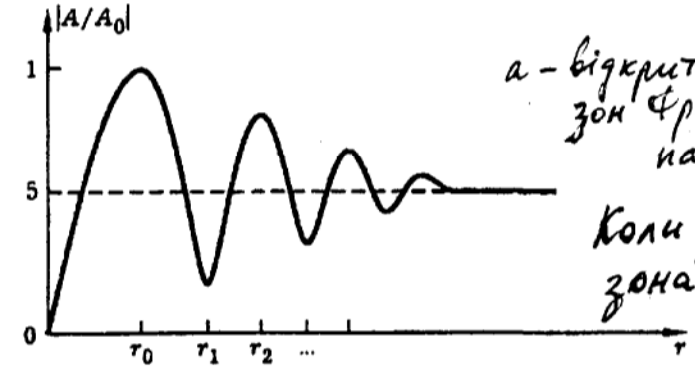
Якщо кожну зону Фр. поділити на ∞ кількість підзон ($N \to \infty$), то ламана крива перетворюється в дугу і кожній зоні Фр. відповідає піввитка спіралі



133

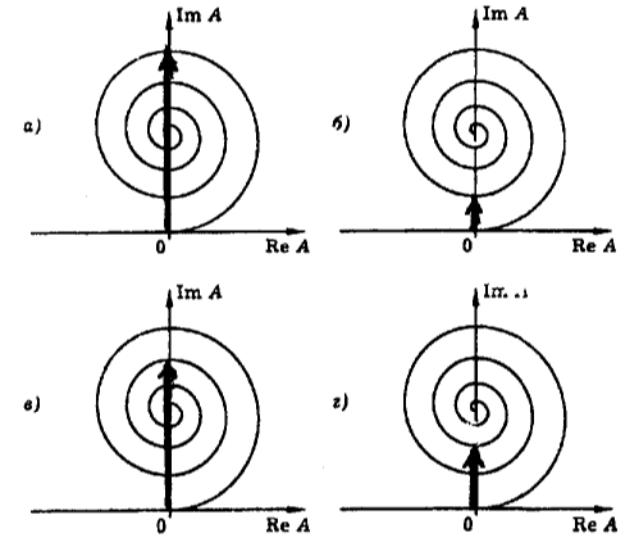
Дифракція на круглому отворі



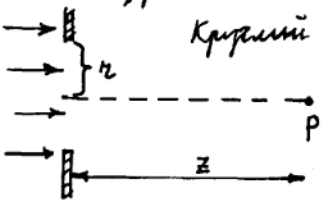


а – відкрита непарна кількість зон Френеля; б – відкрита парна кількість зон Фр.

Коли відкрита лише „0" – зона Фр., то амплітуда в т. P в 2 рази, а інтенсивність в 4 рази більша за випадок, коли відкриті всі зони Фр (екран відсутній).



Дифракція плоскої хвилі



Круглий отвір діаметром $2r$

$a \to \infty$; $b = z$

$$r_n = \sqrt{(n+1)\lambda \cdot z}$$

Площа зони Фр. $S_n = \pi(r_n^2 - r_{n-1}^2) =$

$= \pi \cdot \lambda \cdot z \neq f(n)$!

Число Френеля:

N_F – число зон Фр., яке попадає в межі отвору (число відкритих зон Фр.).

Якщо покласти $r_n = r$, $n+1 = N_F$, то $\boxed{N_F = \frac{r^2}{\lambda \cdot z}}$

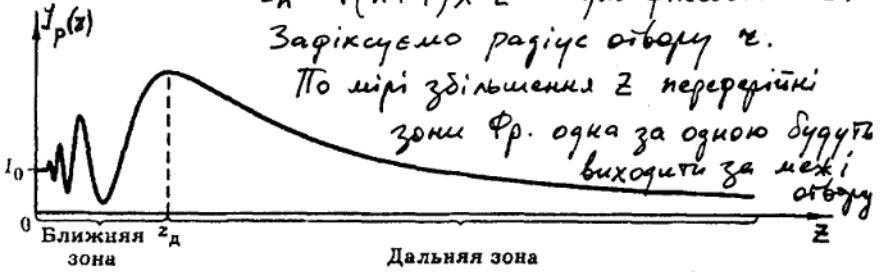
Дифракційна довжина світлового променя. Ближня та дальня зони.

Продовжимо розгляд дифр. плоскої хвилі на кругл. отворі. Як змінюється інт. світла в т. P по мірі збільшення відстані до екрану z:

$r_n = \sqrt{(n+1)\lambda \cdot z}$ – для фіксованої z.

Зафіксуємо радіус отвору r.

По мірі збільшення z передрійні зони Фр. одна за одною будуть виходити за межі отвору



При деякому $z = z_д$ в межах отвору залишиться лише одна „0" зона Фр. В цей момент інтенсивність світла J_p досягне max, після чого монотонно почне зменшуватись по мірі збільшення z.

Для $z \ll z_д$ – ближня зона дифракції. В цій зоні:

- світл. промінь зберігає структуру, задану отвором;
- інтенс. світла в середньому приблизно дорівнює інтенс. падаючої світл. хвилі;
- в межах отвору вміщується певна кількість зон Фр.;
- поперечний переріз променя підтримується постійним (за рахунок інтерференції елементарних вторинних хвиль, які йдуть від різних зон Фр.);

135

Для $z \gg z_g$ – дальня зона дифракції. В цій зоні:

- інтенс. світла на осі променя набагато менша за інтенс. вихідного променя; це означає, що промінь розширюється ?!?!

- для точок дальньої зони в межах отвору вміщується тільки частина (центральної) 0-зони Фр.

- інтерференція елементарних вторинних хвиль виражена слабше. Вона не може підтримати вихідний поперечний профіль променя. Промінь стає розбіжним!

Знайдемо z_g: $r_n = \sqrt{(n+1)\lambda \cdot z} \Rightarrow \boxed{z_g = \frac{r^2}{\lambda}}$

r – радіус променя (радіус отвору)

Вводимо число Френеля $N_F = r^2/\lambda \cdot z$. Тоді

$\boxed{N_F = \frac{z_g}{z}}$

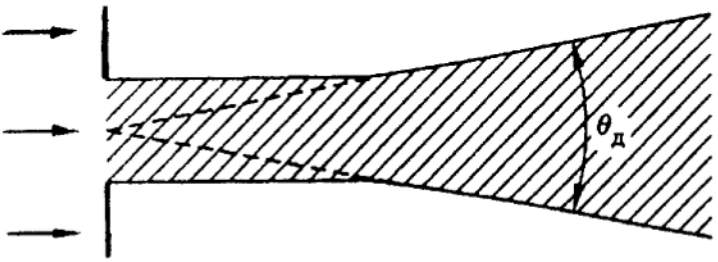
В ближній зоні $N_F > 1$

В дальній зоні $N_F < 1$

136

Дифракційна розбіжність променя в дальній зоні

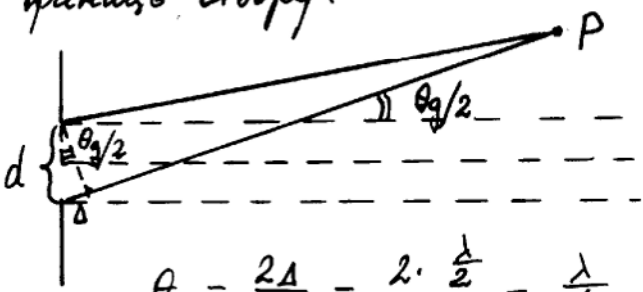
9.



Інтерференція вторинних елементарних хвиль визначає положення границі світлового променя.

Умова інтерф.: $\Delta = \frac{\lambda}{2}$, де Δ – різниця ходу 2-х променів, які приходять від протилежних границь отвору.

$\Delta \approx d \cdot \sin\frac{\theta_д}{2}$



$\theta_д$ – кут дифракційної розбіжності,

як правило: $\theta_д \ll 1$

Тому $\Delta \approx d \cdot \frac{\theta_д}{2}$

$$\theta_д = \frac{2\Delta}{d} = \frac{2 \cdot \frac{\lambda}{2}}{d} = \frac{\lambda}{d}$$

$$\boxed{\theta_д = \frac{\lambda}{d}}$$

Діаметр променя в дальній зоні:

$$\boxed{d(z) = \frac{\lambda}{d} \cdot z}$$

Зробимо оцінки для He-Ne лазера

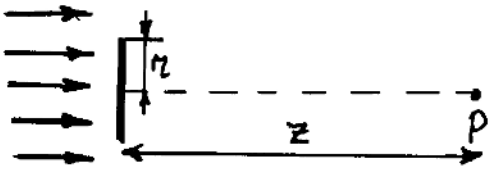
$d = 2$ мм; $\lambda = 0.63$ мкм

$z_д = 1.5$ м; $\theta_д = 3 \cdot 10^{-4}$ рад.

Ці розрахунки можна легко перевірити на досліді.

137

Дифракція на диску. Пляма Пуасона

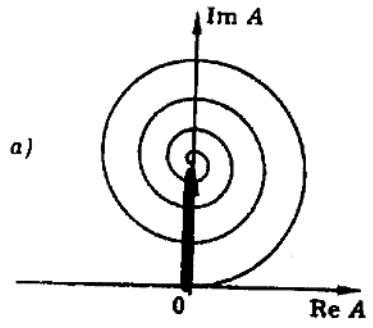


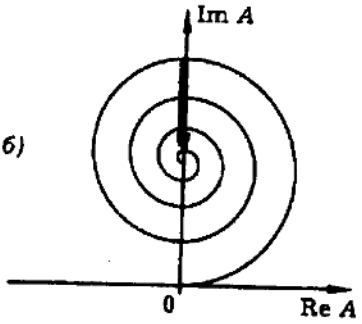
Хвиля – плоска, монохроматична



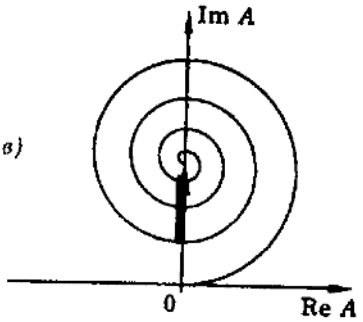
1) Амплітуда світлових коливань в т. P (A_p) залежить від радіусу диску.

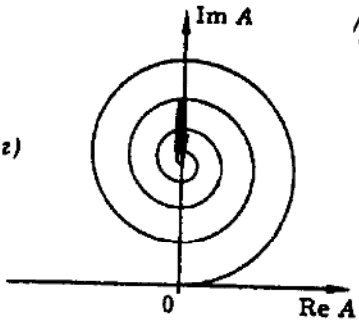
2) Навіть при великому радіусі в центрі геом. тіні інтенсивність світла ≠ 0. Точка Пуасона.





Обидві власивості витікають із зведень до спіралі Фр.

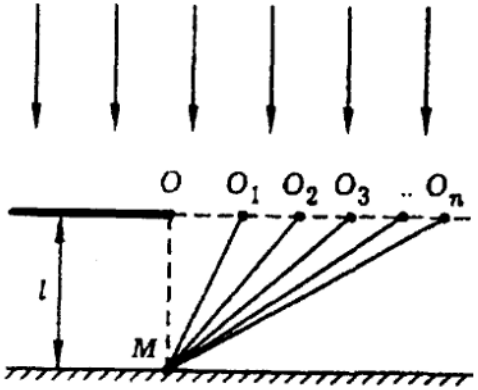




$$r_n = \sqrt{(n+1)\lambda \cdot z}$$

Дифракція на краю екрана

Одна з основних задач дифракції: як відбувається перехід від світла до тіні на межі геометр. оптики та хвильової оптики.



Скористаємось методом зон Френеля (у випадку циліндричної хвилі – зон Шустера). Введемо зони Фр. для т. M, яка лежить на екрані точно під його краєм (межею). Зони Фр. – плоскі смуги, паралельні краю екрану. Межі зон Фр. – $O_1, O_2, O_3 \dots O_n$

$$\begin{cases} OM = l \\ O_1M = l + \frac{\lambda}{2} \\ O_2M = O_1M + \frac{\lambda}{2} = \\ \dots\dots \\ \qquad = l + 2\frac{\lambda}{2}; \end{cases}$$

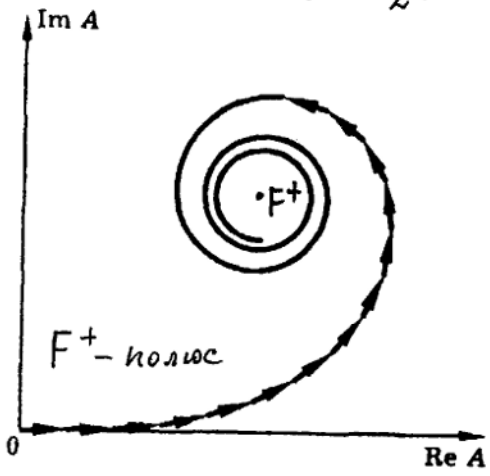
Позначимо через d_n відстань від краю екрана до початку зони Фр. з номером n

$$d_n^2 = OO_n^2 = \left(l + n\frac{\lambda}{2}\right)^2 - l^2 =$$

$$= nl\lambda + \left(n\frac{\lambda}{2}\right)^2$$

$l \gg \lambda$ і можна знехтувати членом $\sim \lambda^2$. Тоді

$$d_n = \sqrt{n \cdot l \cdot \lambda}$$



Площа n-ої зони Фр.

$$S_n = (d_{n+1} - d_n) \cdot L$$

де L – довжина екрану

$$S_n = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \cdot L \cdot \sqrt{\lambda l} = \frac{L \cdot \sqrt{\lambda \cdot l}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \approx \frac{L}{2}\sqrt{\frac{\lambda \cdot l}{n}} \Rightarrow$$

139

139

$S_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ Нагадаємо, що раніше (при розгляді дифракції на круглому отворі, круглому екрані) $S_n \approx const \neq f(n)$.

Ділять кожну із зон Фр. на велике (аж до ∞) число піддон.

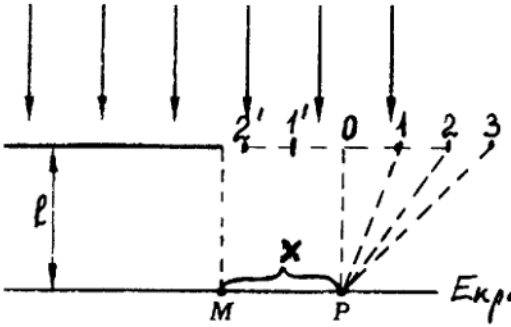
Для визначення інтенс. продифрагованого світла потрібно просумувати коливання, які створюються в т. P елементарними вторинними хвилями, які приходять від всіх відкритих зон та піддон.

Сумування проводять методом векторних діаграм.

Через те, що ширина зони і її площа по мірі віддалення від краю екрану весь час зменшуються, то довжина вектора, який зображає внесок окремої зони (піддони), буде весь час зменшуватись; тим більше, чим далі розташована зона (піддона) від краю екрану.

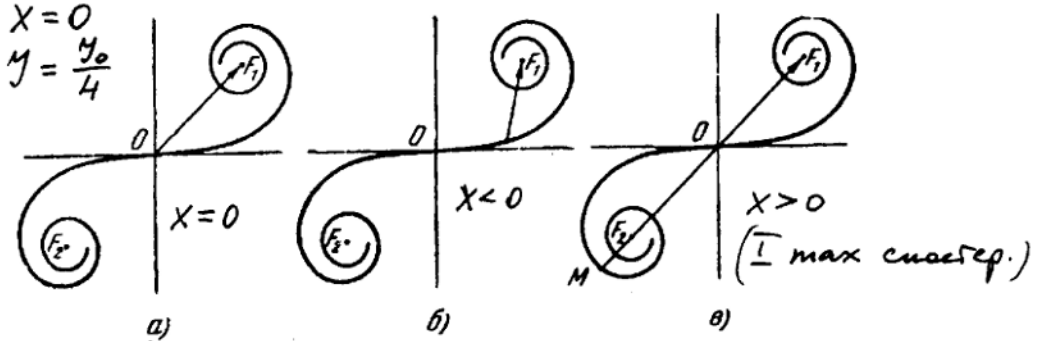
13.

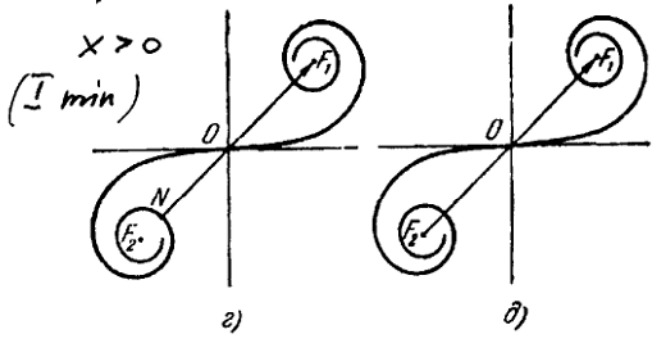
Як користуватись спіраллю Корню:



Зони з номерами m та m' мають однакову ширину. Коливання від нештрихованих зон описуються правим завитком спіралі. За коливання від штрихованих зон відповідає лівий завиток спіралі Корню.

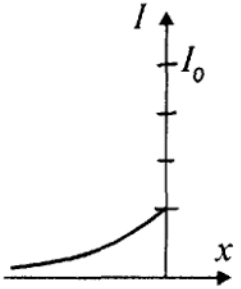
1. Якщо т. P лежить на межі геом. тіні, то коливання від нештрихованих зон (штриховані зони закриті) дадуть результ. вектор, початок якого - в т. O, а кінець - в т. F_1 (рис. а): $Y = \left(\frac{1}{2} E_0\right)^2 = \frac{1}{4} Y_0$





повністю відкриті всі зони (екрану немає).

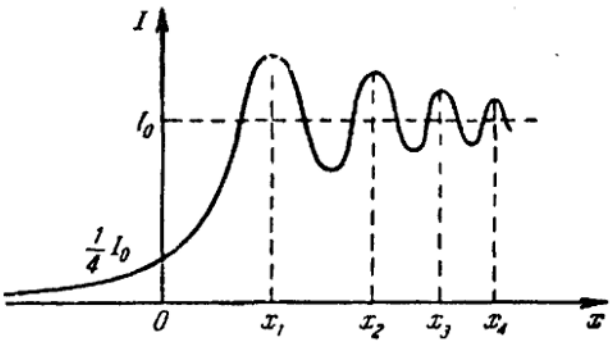
$Y = Y_0 = A_0^2$



2) При зміщенні т.Р в обл. геом. тіні (x<0, рис.б) напівплощина почне закривати все більше нештрих. зон. Тому початок результуючого вектора з т.О почне переміщуватись по правому завитку, наближаючись до полюсу F_1 . В результаті амплітуда монотонно прямує до нуля (див. рис).

3) Для x>0: т.Р зміщується від границі геомет. тіні вправо. Додатково до нештрих. зон додаються (відкриваються) весь час зростаюче число штрих. зон. Початок результуючого вектора сковзає по лівому завитку спіралі в напрямку полюсу F_2 . В результаті амплітуда проходить через ряд максимумів. Перший з них відповідає довжині відрізку MF_1 (рис. *в*). Перший мінімум дорівнює довжині відрізку NF_1 (рис. *г*). При повністю відкритій хвильовій поверхні амплітуда хвилі в точці спостереження дорівнює відрізку F_2F_1 (рис. *д*). В останньому випадку амплітуда в 2 рази більша за амплітуду на межі тіні (інтенсивність в 4 рази більша).

В результаті отримуємо залежність *I(x)*, яка показана на рис.



Правий завиток спіралі відповідає зонам, розташованим справа від т.О. лівий – зліва від т.О.

Кожній точці спіралі Корню відповідає параметр v:

$$v = x \cdot \sqrt{\frac{2}{\lambda \cdot L}}.$$

Цей параметр пропорційний довжині дуги спіралі, яка починається з т.О. ***Значення параметра v вказане на спіралі.***

Приклад: Дано:L=100 см; λ=500 нм; I_0- інтенсивність падаючого світла.

Знайти відстань Δx між першими двома максимумами на екрані та інтенсивність першого максимуму.

142

15.

Враховуючи, що $x = v\sqrt{\frac{\lambda \cdot L}{2}}$, маємо

$$\Delta x = x_2 - x_1 = (v_2 - v_1)\cdot\sqrt{\lambda \cdot L/2}$$

По графіку із спіраллю Корню знаходимо, що

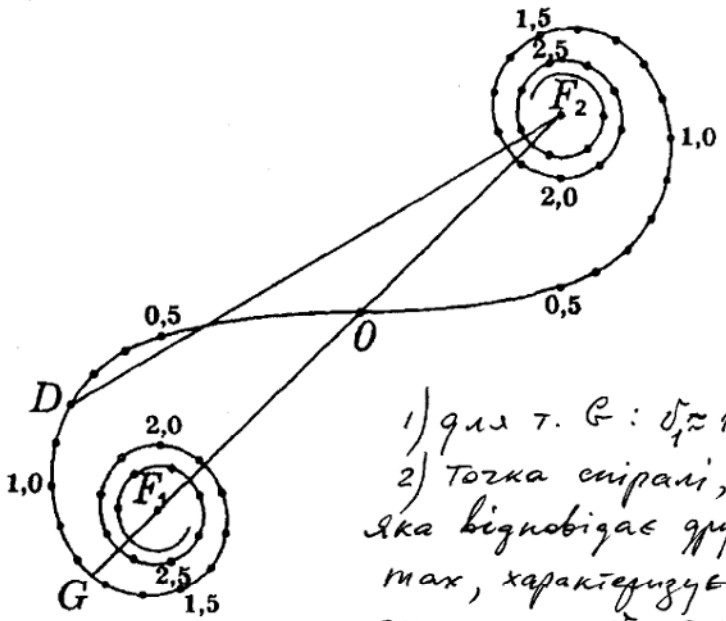
$v_2 = 2.35$; $v_1 = 1.25$ для 2-х перших максимумів.

$$\Delta x = (2.35 - 1.25)\cdot\sqrt{\frac{500\cdot 10^{-9}\cdot 1}{2}} = 5.5\cdot 10^{-4}\,м = 0.55\,мм$$

За допомогою графіка і лінійки знаходимо, що відношення амплітуди 1-го max (тобто відстань між точками GF_2) до амплітуди падаючого світла (довжина F_2F_1)

$$\eta = \frac{GF_2}{F_2F_1} = \frac{94}{80} \approx 1.17$$

Тобто $J_1 = \eta^2 J_0 = 1.37\,J_0$



1) для т. G: $v_1 \approx 1.25$

2) точка спіралі, яка відповідає другому max, характеризується значенням $v_2 \approx 2.35$

143

Дифракція Фраунгофера

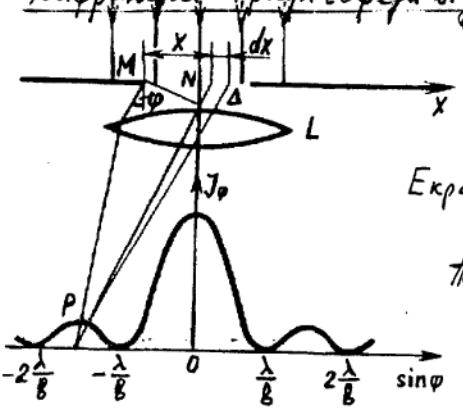
Д. в дальній зоні.

Д. в паралельних променях.

Д., що спостерігається на таких відстанях, для яких кутові розміри неоднорідностей $\ll$ відношення λ до лінійних розмірів цих неоднорідностей.

Між Д. Френеля і Д. Фраунгофера не існує принципової різниці і різкої межі.

Дифракція Фраунгофера від прямокутної щілини



Ширина щілини – b.

$b \ll$ довжина щілини.

Плоска монохр. хвиля.

Екран із зображен. – у фокальній площині лінзи L.

Поділимо відкриту частину хвильового фронту на елементарні зони завширшки dx, паралельні довжині щілини.

Вторинні хвилі від цих зон збираються лінзою у т. P.

Напруженість хвилі від ел. зони dx

$$dE = c \cdot dx \cdot \cos\omega t \quad \text{де } c\text{-стала.}$$

Сумарна напруженість хвилі від всієї щілини

$E = E_0 \cdot \cos\omega t$

$$E_0 = \int_b c \cdot dx = c \cdot b \Rightarrow c = E_0/b$$

Отже: $$dE = \frac{E_0}{b} \cdot dx \cdot \cos\omega t$$

$$\Delta = x \cdot \sin\varphi \Rightarrow \delta = k \cdot x \cdot \sin\varphi = 2\pi \frac{1}{\lambda} x \cdot \sin\varphi$$

$$dE = \frac{E_0}{b}\,dx\,\cos(\omega t - kx\cdot\sin\varphi)$$

$$E = \int_0^b \frac{E_0}{b}\cos(\omega t - kx\cdot\sin\varphi)\,dx = E_0\,\frac{\sin\left[\frac{kb}{2}\sin\varphi\right]}{\frac{kb}{2}\sin\varphi}\cdot$$

$$\cdot\cos\left(\omega t - \frac{kb}{2}\sin\varphi\right)$$

Амплітуда коливань

$$E_\varphi = E_0\,\frac{\sin\left[\frac{kb}{2}\cdot\sin\varphi\right]}{\frac{kb}{2}\sin\varphi} = \frac{E_0\cdot\sin\left[\frac{\pi b}{\lambda}\cdot\sin\varphi\right]}{\frac{\pi b}{\lambda}\cdot\sin\varphi}$$

$$\boxed{J_\varphi = J_0\,\frac{\sin^2\left(\frac{\pi b}{\lambda}\cdot\sin\varphi\right)}{\left(\frac{\pi b}{\lambda}\cdot\sin\varphi\right)^2}} \quad (A)$$

J_0 – інт. світла від всієї щілини в напрямку $\varphi = 0$

Аналіз (A):

1) $J_{-\varphi} = J_\varphi$: дифр. картина симетрична відносно головної оптичної осі лінзи.

2) Дослідимо (A) на extч.:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ – відома границя.

Тоді для $\varphi = 0$ (в центрі дифр. картини) буде max. (головний, а краще – „нульовий" max).

3) Умова для „нульового" max не залежить від λ. „Нульовий" max не розкладається в спектр.

4) Min інтенсивності спостерігаються для кутів дифр., коли $\frac{\pi b}{\lambda}\cdot\sin\varphi = \pm m\cdot\pi$ $(m = 1, 2, 3, \dots)$

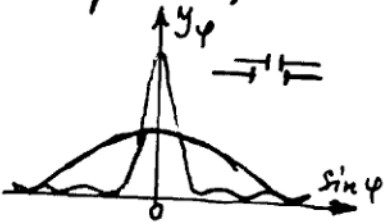
(*) $\boxed{b\cdot\sin\varphi = \pm m\lambda}$ – умова min

5) Між min розміщені max інтенсивності, кути дифр. яких знаходять, розв'язуючи трансцендентне рівняння $\operatorname{tg} u = u$, де $u = \frac{\pi b}{\lambda}\cdot\sin\varphi$, тобто для кутів $\sin\varphi_1 = \pm 1.43\,\frac{\lambda}{b}$; $\sin\varphi_2 = \pm 2.46\,\frac{\lambda}{b}$; ...

6) З збільшенням φ інтенс. max швидко спадає:
$I_0 : I_1 : I_2 : I_3 : \ldots = 1 : 0.045 : 0.016 : 0.008 : \ldots$
Основна частина світла зосереджена в головному („нульовому") max.
5% св. ен. припадається на два перших max і 2% - на два других max.

7) Для немонохроматичного (напр., „білого") світла:
гол. max не зміщується (він - „білий");
вторинні max ($m = 1, 2, 3, \ldots$) - кольорові: для кожної λ - свій кут φ. Фіолетова частина розміщена ближче до „нульового" max, а червона - далі.

8) З (A) видно, що дифр. картина залежить від b - ширини щілини: при $b \uparrow$ величина $\varphi \downarrow$

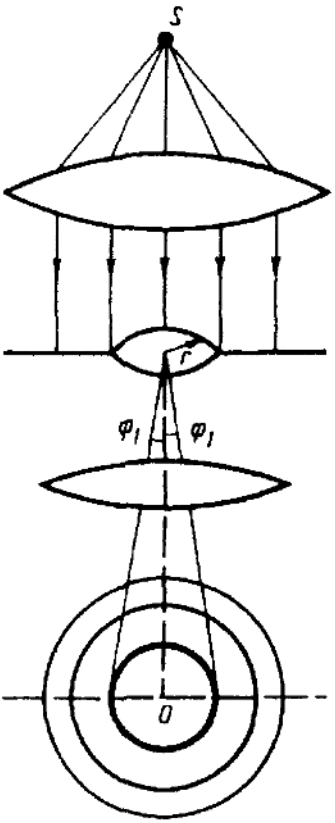


9) При $b = \lambda$ (*): (для $m = 1$)
$\Rightarrow \sin\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ головний max в цьому разі охоплює всю область екрану.

10) Для $b > \lambda$ кутова відстань між першими max зменшується, а головний max стає більш різким.

11) Коли $b \gg \lambda$, то в центрі дифр. картини буде чітке зображення джерела, що відповідає прямолінійному розповсюдженню світла.

Дифракція світла на круглому отворі



Принципово не важливо: плоска або сферична хвиля ⇐ лінза.

1) У центрі дифр. картини – світла пляма (завжди!).

2) Розподіл інтенсивності в дифракц. картині виражається через спеціальну ф-цію Бесселя I порядку $J_1(u)$, де $u = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot r \cdot \sin\varphi$

r – радіус отвору;

φ – кут дифракції.

Корінь цієї ф-ції, що відповідає I min (визначає кутові розміри центральної світлової плями), визначається з умови $\boxed{\sin\varphi_1 = 0.61\,\frac{\lambda}{r}}$ (**).

Це дуже важлива формула

Її можна записати і так: $\boxed{\sin\varphi_1 = 1.22\,\frac{\lambda}{D}}$

Розподіл інтенсивності в дифракц. картині описується залежністю $\boxed{J_\varphi = J_0\left[\frac{2J_1(u)}{u}\right]^2}$

Наближена формула для визначення напрямків на наступні ($m = \pm 2, \pm 3, \ldots$) min:

$$\sin\varphi_m \approx m \cdot 0.61 \cdot \frac{\lambda}{r}$$

Насправді: $\sin\varphi_2 = 1.12\,\frac{\lambda}{r}$; $\sin\varphi_3 = 1.62\,\frac{\lambda}{r}$

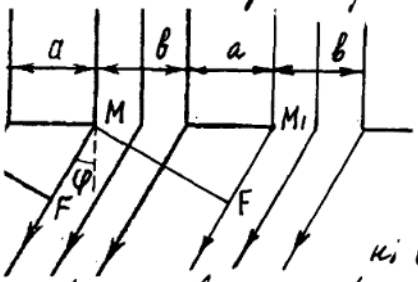
$\sin\varphi_4 = 2.12\,\frac{\lambda}{r}$

147

5.

Дифракція світла на двох щілинах

1 щілина переміщується паралельно самій собі на відстань a. Результуюча картина м.б. визначена шляхом додавання хвиль, які йдуть від обох щілин.



В тих напрямках, в яких ні від однієї із щілин не розповсюджувалось світло, теж будуть спостерігатись тіні.

Інша справа відбувається з тах: вони вже не будуть спостерігатись в тих же напрямках, що і у випадку 1 щілини. Це пов'язане з взаємною інтерференцією хвиль від 2 щілин ⇒ в деяких напрямках вони будуть компенсуватись ⇒ виникають додаткові тіні, напрямки на які визначаються умовою:

умова тін: $\Delta = MF = MM_1 \sin\varphi = m\lambda + \frac{\lambda}{2} \equiv (2m+1)\frac{\lambda}{2}$ (1)

Дія 1 щілини буде підсилюватись дією $m = 0, 1, 2, \ldots$

умова тах: іншої щілини, якщо $M_1F = MM_1 \cdot \sin\varphi = m\lambda$ (2)

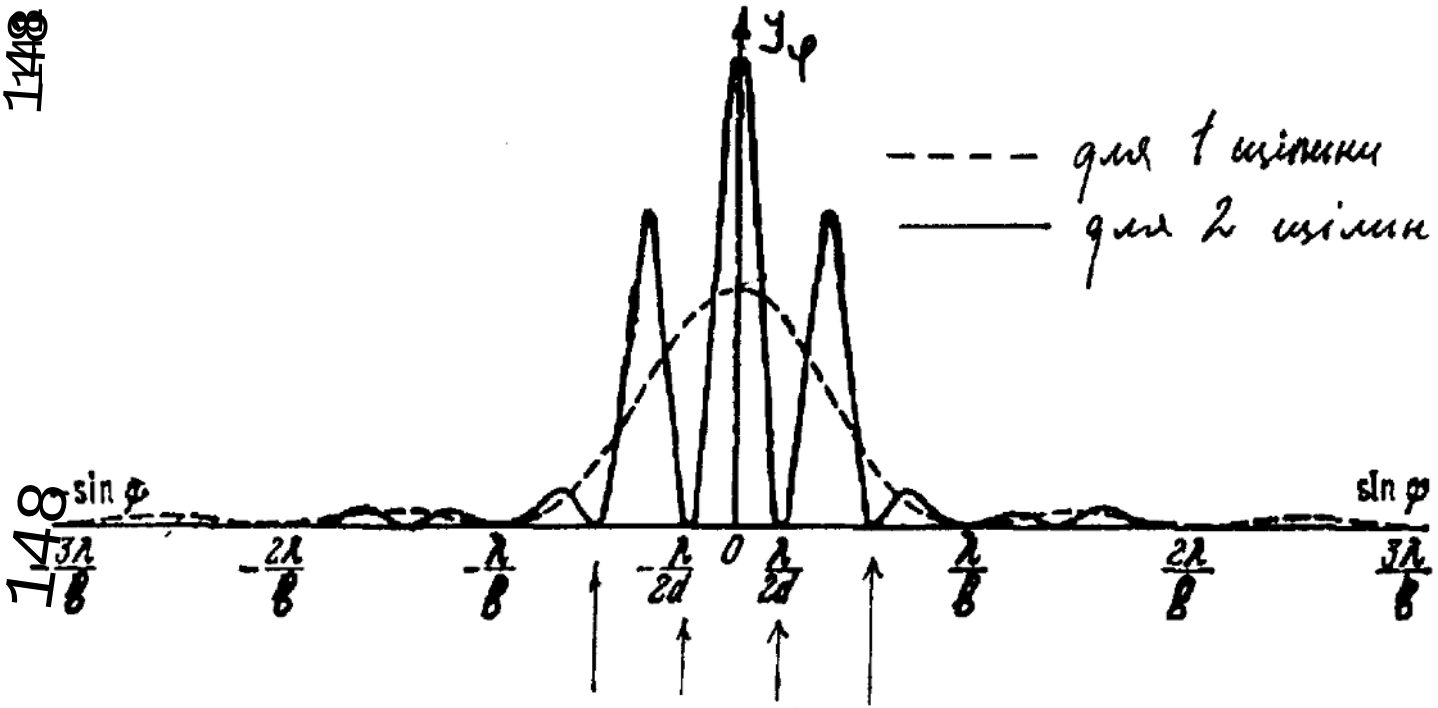
(2) – умова головних тах.

Якщо $a + b = d$, то (1) і (2) перепишуться:

$d \cdot \sin\varphi = (2m+1)\lambda/2$ – умова додаткових тін

$d \cdot \sin\varphi = m\lambda$ – умови головних тах

Попередні тіні спостерігались в напрямках, яким задовольняє умова $b \cdot \sin\varphi = m\lambda$ – умова компенсації тін (для 1 щілини шириною b).



Додаткові min.

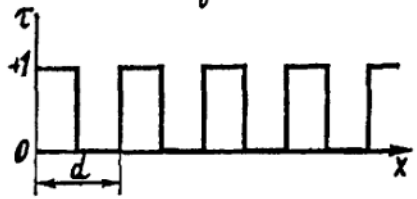
Для 2-х щілин між двома головними max існує 1 додатковий min.

Для 3-х щілин – 2 дод. min, для N щілин – $(N-1)$ дод. min.

149

Дифракція світла на багатьох щілинах

По аналогії із дифр. на 2-х щілинах приходимо до висновку, що у випадку з 3-ма щілинами між сусідніми max спостерігається 2 додаткових min; у випадку з N щілинами число додаткових min, які спостерігаються між сусідніми max, дорівнює $N-1$.



Період $d = a + b$

τ - коеф. пропускання (змінюється стрибком)

В напрямку $\varphi = 0$ результ. ампл. від N щілин $E_0 = NE_{01}$, де E_{01} - амплітуда коливань від 1-ї щіл.

Інтенсивність в напряку $\varphi = 0$ $\quad I_0 = CN^2E_{01}^2$

де C - коеф. пропорц. $\quad I_0 \sim N^2$!

Min буде спостерігатись в тому випадку, коли коливання від 1-ї і останньої щілин будуть відрізнятись по фазі на 2π: $N \cdot \delta = 2\pi$, де δ - різниця фаз коливань від сусідніх щілин $\Rightarrow \delta = 2\pi/N$.

З іншого боку $\delta = k \cdot \Delta l = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta l$, де Δl - різниця ходу променів від сусідніх щілин.

$$\frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta l \Rightarrow \Delta l = \frac{\lambda}{N}.$$

Умова додаткових min, розташованих між головними max:

$$\boxed{d \cdot \sin\varphi = m\lambda + p \cdot \frac{\lambda}{N}} \quad (B) \text{ де } p = 1, 2, \ldots, N-1$$

Між двома сусідніми головними max знаходяться $(N-1)$ додаткових min та $(N-2)$ додаткових max.

Продифер. (B): $d \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi = \frac{\lambda}{N} \cdot dp$; $\quad dp = 1. \Rightarrow$

$$\boxed{\Delta\varphi = \frac{\lambda}{N \cdot d \cdot \cos\varphi} = \frac{\lambda}{L \cdot \cos\varphi}} \quad (C)$$

Кутова ширина головного max

L - ширина періодичної структури

Аналіз (с): 1) При малих кутах дифракції $\cos\varphi \approx 1$. Тоді $\Delta\varphi = \frac{\lambda}{N \cdot d}$. При $d = const$ із збільшенням числа щілин (N), крім збільшення інтенсивності I_φ ($\sim N^2$), відбувається різке ($\sim \frac{1}{N}$) звуження головних max (для max невеликих порядків, коли $\cos\varphi \approx 1$).

2) Величина $\Delta\varphi$ залежить не від d і N окремо, а від $d \cdot N$, тобто від L.

3) З ростом кута дифракції φ ширини головних max збільшуються.

4) Головні max будуть тим вужчими, чим більша ширина періодичної структури (L) та менше кут дифракції (φ).

151

9.

Розподіл інтенсивності в дифракційній картині від N щілин

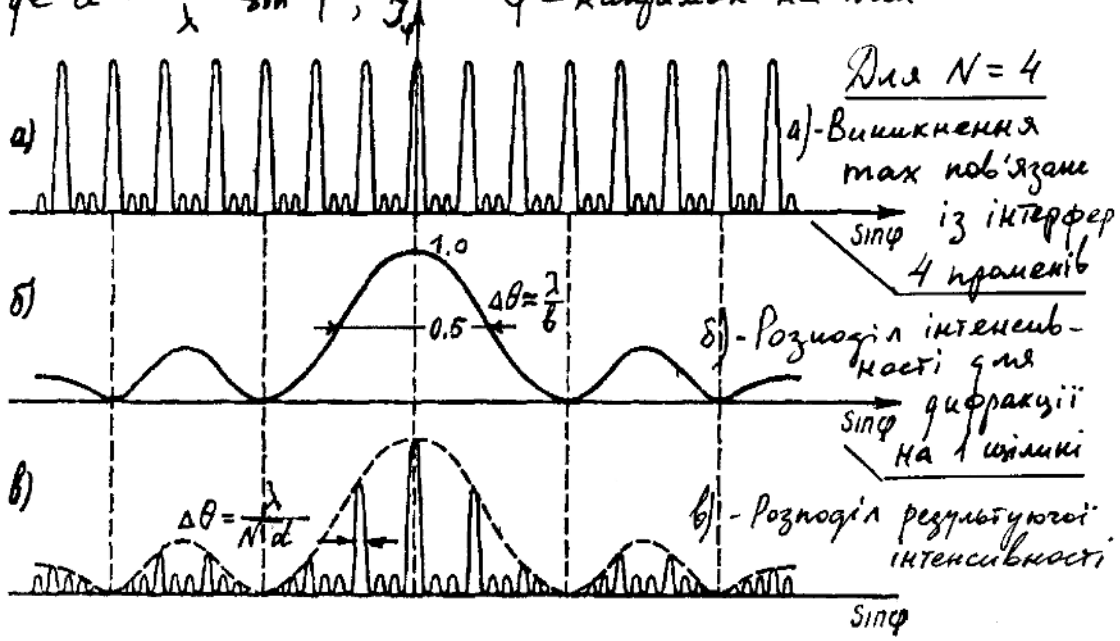
Для 1 щілини було знайдено

$$J_\varphi = J_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi b}{\lambda}\cdot\sin\varphi\right)}{\left(\frac{\pi b}{\lambda}\cdot\sin\varphi\right)^2} = J_0\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2$$

де $u = \frac{\pi b}{\lambda}\cdot\sin\varphi$; J_0 – інтенсивність від всієї щілини в напрямку $\varphi = 0$

Для N щілин: $$\boxed{J_\varphi = J_0\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2\left(\frac{\sin N\alpha}{\sin\alpha}\right)^2}$$

де $\alpha = \frac{\pi d}{\lambda}\sin\varphi$; φ – напрямок на тін



Для N = 4

а) - Виникнення max пов'язане із інтерфер 4 променів

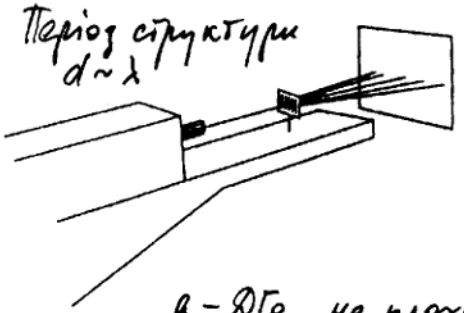
б) - Розподіл інтенсивності для дифракції на 1 щілині

в) - Розподіл результуючої інтенсивності

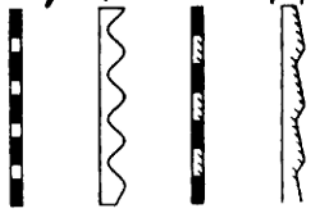
152

Дифракційна гратка (ДГр)

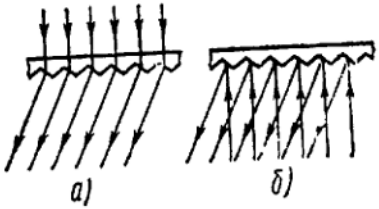
Період структури $d \sim \lambda$



Типи періодичних структур



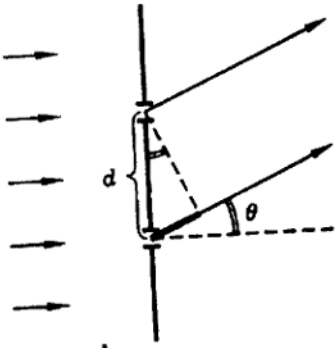
а – ДГр „на прохід"
б – ДГр „на відбиття"



Рівняння ДГр

$\Delta = d \cdot \sin\theta$ – з рис.

$\Delta = m \cdot \lambda$ – умова max (за визначенням)

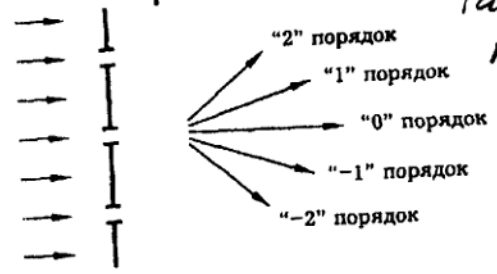


$$d \cdot \sin\theta = m\lambda \quad (1) \qquad m = 0; \pm 1; \pm 2 \ldots$$

$\sin\theta = m\frac{\lambda}{d}$ Аналіз (1):

1) $d \sim \lambda \cong 10^{-4}$ см $= 1$ мкм

При цьому max і min будуть помітними під значними кутами φ. З цього також витікає, що ДГр повинна мати число штрихів $\sim 10^2 \div 10^3$/мм

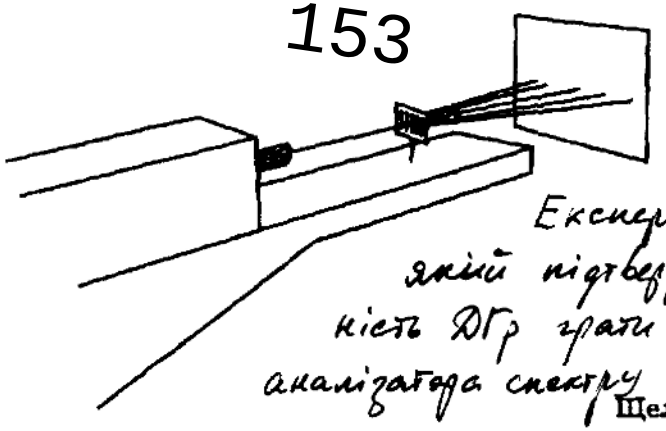


2) Якщо $d < \lambda$, то при $m = 1$ $\sin\theta = \frac{\lambda}{d} > 1$ – NO!

Залишається лише $m = 0$. Це означає, що дифракції немає.

3) Положення max залежить від $\lambda \Rightarrow \theta(\lambda) \Rightarrow$ ДГр – спектральний прилад та аналізатор спектру.

153



Експеримент, який підтверджує здатність ДГр грати роль аналізатора спектру

	Щелей на миллиметр
• • • • • • • • • • • • • • • •	100
•• •• •• •• •• •• ••	200
••• ••• •••	600

Як виготовити ДГр



1) 1821 р. Фраунгофер: 2 гвинта з намотаним дротом: 40 – 340 штр/дюйм. визначив довж. хвилі D-лінії Na: $\lambda = 5886$ Å

2) Метод гравіровки на склі або на плівці Au, яка нанесена на скляну підкладку: 8000 штр/дюйм, $d = 3$ мкм; $L = 0.5$ дюйм

3) Роуланд: вгнуті ДГр – др 20 тис. штр/дюйм $L = 10$ см.

4) Сучасні ДГр: а) на відбиття, профіль штриха – трикутник – ешелетти. В нульовий так „переходить" др 70-80% світлової енергії: $\lambda = 1$ мкм $\div$ 0.1 мкм і навіть для рентгенівської обл. ($\lambda \cong 1$ нм); $L = 40$ см; $4 \div 3600$ штр./мм

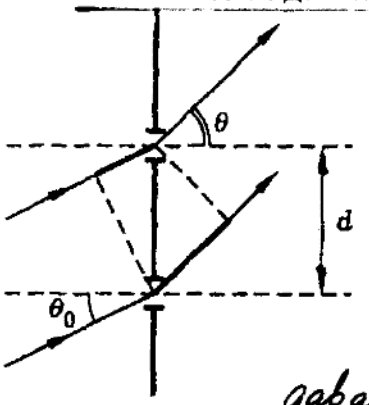
б) копії з гравіроваших ДГр – репліки.

в) голографічні ДГр.

154

12.

Нахилене падіння променів на дифракційну гратку



$\Delta = d(\sin\theta - \sin\theta_0)$

$\Delta = m\lambda$, де $m = 0, \pm1, \pm2 \ldots$

$d(\sin\theta - \sin\theta_0) = m\lambda$

При скользящому падінні, коли $\theta_0 \to \frac{\pi}{2}$, навіть груба ДГр (з періодом $d >> \lambda$) може давати помітну дифракцію

$\theta \approx \theta_0 \Rightarrow \sin\theta - \sin\theta_0 = 2\sin\frac{\theta-\theta_0}{2}\cdot\cos\frac{\theta+\theta_0}{2} \approx$

$\approx (\theta-\theta_0)\cdot\cos\theta_0$

$(\theta-\theta_0)\cdot\cos\theta_0 = \frac{m\lambda}{d} \Rightarrow \frac{m\lambda}{d\cdot\cos\theta_0} = \frac{m\lambda}{d_{ef}} = \theta-\theta_0$

Через те, що $\theta_0 \approx \frac{\pi}{2} \Rightarrow d_{ef} \ll d$

Дифракцію світла можна спостерігати навіть на грамофонній платівці з $d \sim 100$ мкм



Скользяче падіння білого світла

155

13

Характеристики ДГр як спектрального приладу

1) **Кутова дисперсія**: $D_\varphi = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda}$ де $\delta\varphi$ - кутова відстань між двома спектральними лініями, які відстоять одна від одної на $\delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$

2) **Лінійна дисперсія**: $D_\ell = \frac{d\ell}{d\lambda}$; $D_\ell = f \cdot D_\varphi$

де f - фокусна відстань лінзи, яка проектує спектр на екран.

Для ДГр max спостерігається, коли $d \cdot \sin\varphi = m \cdot \lambda$

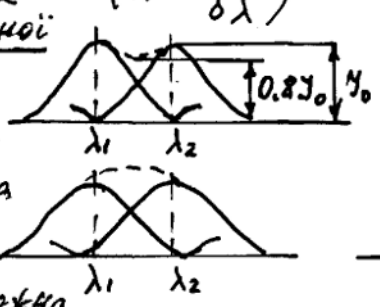
$$d \cdot \cos\varphi \cdot \delta\varphi = m \cdot \delta\lambda \Rightarrow D_\varphi = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda} = \frac{m}{d \cdot \cos\varphi}$$

D_φ (а значить і D_ℓ) $\sim m \Rightarrow$ збільшуй m!

$D_\varphi \sim \frac{1}{d} \Rightarrow$ зменшуй d!

3) **Роздільна сила** $\left(A = \frac{\lambda}{\delta\lambda}\right)$

Принцип роздільної здатності Релея: мінімальна відстань між двома спектральними лініями, які можна розділити (розрізнити як дві), відповідає випадку, коли max I лінії співпадає із min II лінії



Max m-го порядку для променів з λ_1 та λ_2 спостерігаються відповідно під кутами $\varphi_m^{(1)}$ та $\varphi_m^{(2)}$

$$\begin{cases} d \cdot \sin\varphi_m^{(1)} = m\lambda_1 \\ d \cdot \sin\varphi_m^{(2)} = m\lambda_2 \end{cases}$$

Перехід від max до сусіднього min х-ється рівністю ходу $\Delta = \frac{\lambda}{N}$, де N – загальна кількість штрихів в ДГр. Тоді m-ий min для λ_1 буде задовольняти умові: $d \cdot \sin\varphi^{(1)}_{min} = m\lambda_1 + \frac{\lambda_1}{N}$

Відповідно до критерію Релея, розділення ліній має місце, коли $\varphi^{(1)}_{min} = \varphi^{(2)}_{m} \Rightarrow m\cdot\lambda_1 + \frac{\lambda_1}{N} = m\lambda_2$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = m\cdot N = A$$

роздільна сила (A) – "чим більше, тим краще"

Аналіз (A): 1) $A \sim m$ (якіщо дисперсія $D_\varphi \sim m$).

2) $A \sim N$ $(D_\varphi \sim n)$ N – загальна кількість штрихів; n – число штрихів на од. довжини ДГр $n = N/L$.

3) Знайдемо max значення A (A_{max}):

$d\cdot\sin\varphi = m\lambda \Rightarrow m = d\cdot\sin\varphi/\lambda \Rightarrow m_{max} = \frac{d}{\lambda}$

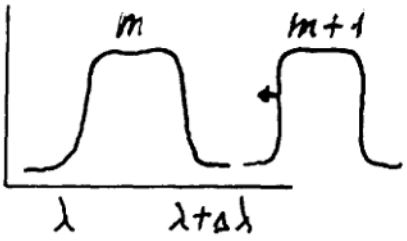
$A_{max} = m_{max}\cdot N = \frac{d}{\lambda}\cdot N = \frac{L}{\lambda}$ $N\cdot d = L$ – робоча довжина ДГр

4) Якщо є декілька ДГр з різними d_i, але однаковими $L = N_1 d_1 = N_2 d_2 = \ldots$, то ці ДГр мають однакову A. Але тоді треба дивитись на n – кількість штрихів на 1 од. довжини $n = \frac{N}{L} = \frac{L/d}{L} = \frac{1}{d}$

Намагаються виготовити ДГр з великим розміром робочої довжини $L = 8-15-20$ см. Сучасні ДГр мають $A = 10^5 - 2\cdot10^5$ (у інтерфером. Ф.-П. A до 10^6).

Дисперсна область (G) – максимальна ширина спектрального інтервалу, при якому ще не відбувається перекриття спектрів сусідніх порядків, що відповідають початку і кінцю інтервала.

157



Спектр. прилад може розрізнити окремі довжини хвиль і ідентифікувати їх, якщо правий край спектру m-го порядку розташований лівіше, ніж лівий край спектру (m+1)-го порядку.

Умовою межі ідентифікації спектральних ліній буде співпадання (m+1)-го max з довжиною хв. λ з т-им max довж. хвилі (λ+Δλ):

$$d\cdot\sin\varphi_m = m(\lambda+\Delta\lambda);\quad d\cdot\sin\varphi_{m+1} = (m+1)\lambda$$

$\varphi_{m+1} = \varphi_m$ – за визначенням G

$$m(\lambda+\Delta\lambda) = (m+1)\lambda \Rightarrow G = \Delta\lambda = \frac{\lambda}{m}$$

$G \sim \frac{1}{m}$! Для ДГр m-мало (~2, 3..)
Тому $G \sim \left(\frac{1}{2} \div \frac{1}{3}\right)\lambda$! $G \sim 2000$ Å

Для порівняння: інтерфер. спектроскопи (інтерфер. Фабрі-Перо) мають $m = 10^5 \div 10^6 \Rightarrow G = \frac{\lambda}{10^6} =$
$= \frac{5000\text{ Å}}{10^6} = 0.005$ Å. Для дослідження тонкої і надтонкої структури спектр. ліній.

Для ДГр дуже велика дисп. область. Це добре: стає можливим проведення спектр. аналізу в широкому діапазоні спектру (навіть білого світла).

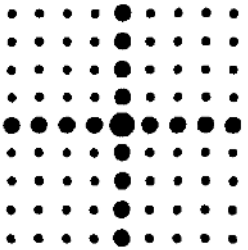
Питання: "G – краще більше, чи краще менше?"
Відповідь: "Дивлячись для чого!"

Дифракція на двовимірній періодичній структурі

Накладають 2 дифр. гратки так, щоб їх щілини були взаємно перпендикулярні:



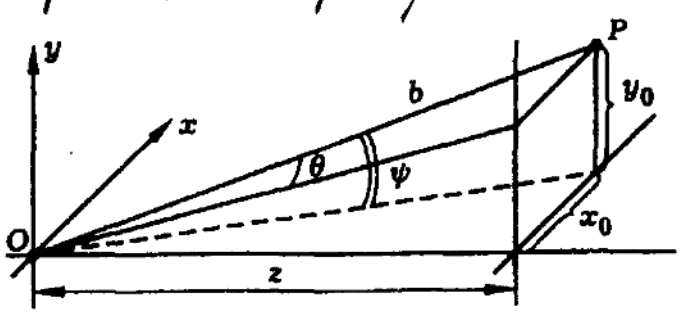
а.



б.

В результаті виникає дифр. картина (рис. б).

Знайдемо напрямки на головні дифр. max дифракц. картини, яка отримується на 2-вимірній структурі:



P - точка спостер. має декартові координ. x_0, y_0 та кутові координ. θ та ψ.

По аналогії з 1-вимірною періодичною структурою:

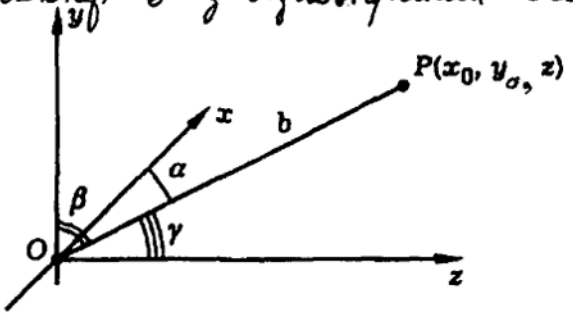
$$(1)\quad \left.\begin{aligned} \sin\theta &= m_1 \lambda / d_1 \\ \sin\psi &= m_2 \lambda / d_2 \end{aligned}\right\}$$ Умови головних максимумів

де d_1, d_2 - періоди дифр. решітки вздовж осі x та осі y, відповідно;

m_1, m_2 - цілі числа: $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

З рис. видно, що $\sin\theta = \frac{x_0}{b}$; $\sin\psi = \frac{y_0}{b}$

Введемо 3-вимірну систему відліку: координати т. P задамемо через кути α, β, γ, які складає радіус-вектор $\vec{b}$ з відповідними осями (див. рис.):



$$\cos\alpha = \frac{x_0}{b} = \sin\theta$$

$$\cos\beta = \frac{y_0}{b} = \sin\psi$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{b}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

В цих змінних напрям на головні максимуми буде виражений формулами:

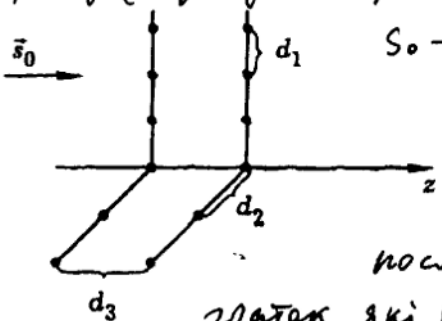
$$\boxed{d_1 \cos\alpha = m_1 \cdot \lambda; \qquad d_2 \cdot \cos\beta = m_2 \cdot \lambda} \quad (2)$$

Дифракція на тривимірній періодичній структурі. Дифракція рентгенівських променів в кристалах.

Для кристалів $d \sim 1$ Å. Світло має $\lambda \sim 10^4$ Å. ⇒ Дифракції бути не може.

Але для рентген. випромінювання $\lambda \sim 1$ Å!

Будемо вважати, що елементарна комірка кристала має форму прямокутного паралелепіпеда з довжиною ребер (періодами решітки): d_1, d_2, d_3 (див. рис.):



S_0 – одиничний вектор напрямку падаючої хвилі

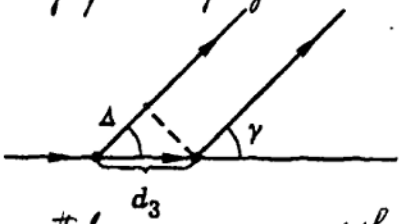
3-вимірну кристалічну ґратку можна розглядати як послідовність 2-вимірних плоских ґраток, які відстоять одна від одної на відстані d_3

160

Скористатись (2) можна, але це ще не дає гарантій, що у відповідних напрямах α та β будуть виникати дифр. max. Це буде ще залежати від того, як будуть інтерферувати між собою хвилі, які дифрагують на різних атомних площинах.

Умова інтерференц. підсилення хвиль, які йдуть від двох сусідніх атомних площин, має вигляд

$$\Delta = d_3 - d_3 \cdot \cos\gamma = m_3 \cdot \lambda \qquad (3)$$



Якщо виконується (3), то хвилі будуть додаватись у фазі та підсилюватись.

Повна система рівнянь для кутів α, β, γ, які визначають напрямки на головні max для плоскої хвилі:

$$(2)+(3) \Rightarrow \begin{cases} d_1 \cdot \cos\alpha = m_1 \cdot \lambda \\ d_2 \cdot \cos\beta = m_2 \cdot \lambda \\ d_3 (1 - \cos\gamma) = m_3 \cdot \lambda \\ \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \end{cases} \qquad (4)$$

Рівняння Лауе для випадку, коли хвиля падає на кристал і розповсюджується вздовж осі z, яка ⊥ атомній площині кристалу

Для довільного напрямку падаючої хвилі $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ відносно осей x, y, z рівняння Лауе має вигляд:

$$(5) \begin{cases} d_1 (\cos\alpha - \cos\alpha_0) = m_1 \cdot \lambda \\ d_2 (\cos\beta - \cos\beta_0) = m_2 \cdot \lambda \\ d_3 (\cos\gamma - \cos\gamma_0) = m_3 \cdot \lambda \\ \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \end{cases}$$

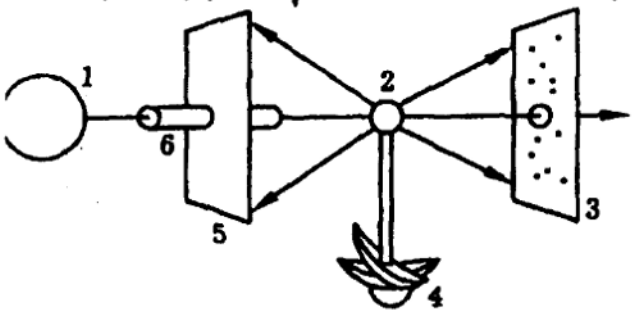
Можна вилучити із (5) кути α, β, γ. Отримуємо:

$$\left(\frac{m_1 \cdot \lambda}{d_1}\right)^2 + \left(\frac{m_2 \cdot \lambda}{d_2}\right)^2 + \left(\frac{d_3 - m_3 \cdot \lambda}{d_3}\right)^2 = 1 \qquad (6)$$

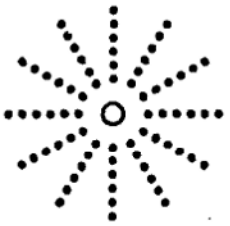
161

Система (5) має розв'язки лише для деяких визначених значень λ та визначених напрямків падаючої хвилі відносно осей кристалу.

Тому на практиці використовують рентген. випром. з широким спектром або обертають кристал відносно монохроматичного джерела за допомогою гоніометра. (див. рис. а). Отримуємо лауеграму (див. рис. б).

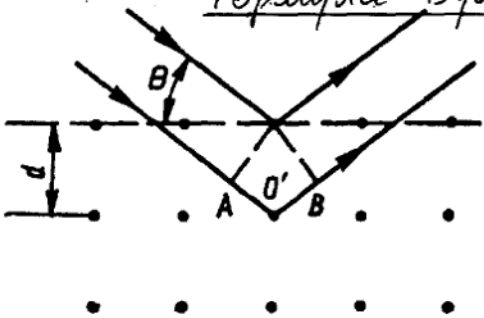


а.



б.

Формула Вульфа – Бреггів.



θ – кут ковзання (кут, доповнюючий кут падіння до 90°)

Різниця ходу $\Delta = AO' + O'B = 2d \cdot \sin\theta$

Для інтерференційного підсилення необхідно, щоб

(7) $\boxed{\Delta = 2d \cdot \sin\theta = m\lambda}$ Формула Вульфа – Бреггів

$m = 1, 2, 3, \ldots$

При довільному падінні монохроматичного променя на кристал дифракція не виникає. Необхідно, повертаючи кристал, знайти такий кут θ.

Наприклад: кристал кальцита $CaCO_3$ з $d = 3.029$ Å; падає випромін. з $\lambda = 1.54$ Å: для max I порядку

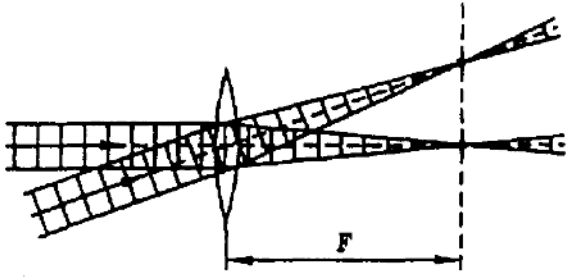
$\theta = \arcsin(\lambda/2d) \approx 14°40'$

2 напрямки застосування (7):

1. Рентгеноструктурний аналіз: по відомій λ визначають θ та m і розраховують d - міжплощ. відстань.
2. Рентгеноспектроскопія: по відомій кристалічній сталій (d) визначають θ та m і розраховують невідому λ падаючого випромінювання.

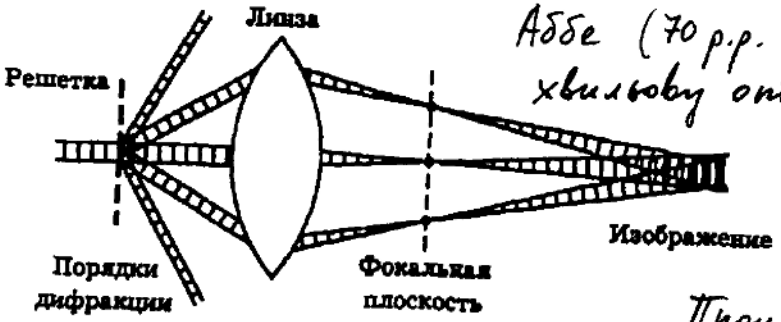
Лінза, як елемент, який виконує просторове перетворення Фур'є

Лінза збирає паралельні промені світла в точку, яка розташована в фокальній площині. Розподіл світла в фокальній площині набуває форму просторового спектру поля, яке падає на лінзу.



163

Формування оптичного зображення. Теорія Аббе



Аббе (70 р.р. XIX ст.) ввів хвильову оптику в прикладну оптику.

За Аббе:

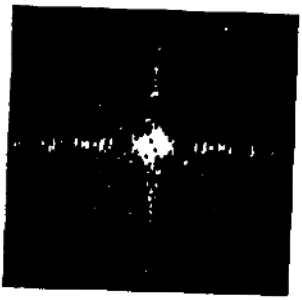
Процес формування лінзою опт. зображення можна розділити на 2 етапи:

– фур'є-аналіз хвильового поля об'єкта;

– фур'є-синтез зображення.



а.



б.

а – оптичне зображення;

б – просторовий спектр цього зображення.

Важливу роль грає фокальна площина, в якій утворюється просторовий спектр поля, яке падає на лінзу.

Теорія Аббе несе в собі ідею обробки зображення шляхом дії на просторовий спектр зображення:

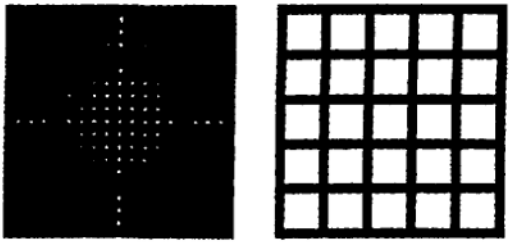
– розміщення в фокальній площині лінзи діафрагми або екрану відповідної форми може привести до такого перетворення Фур'є-спектру зображення, при якому потрібні деталі зображення будуть підкріплені, а завади усунені. Ця операція незнь. просторово частотною фільтрацією оптичних полів.

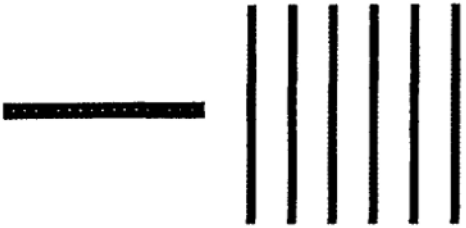
Дослід Аббе-Портера

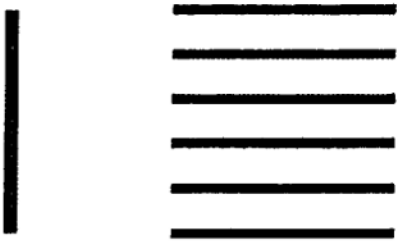
Світло - когерентне



Фур'є-спектр має систему плям. Розмір окремої плями визначається розміром гратки, а відстань між плямами – періодом гратки.





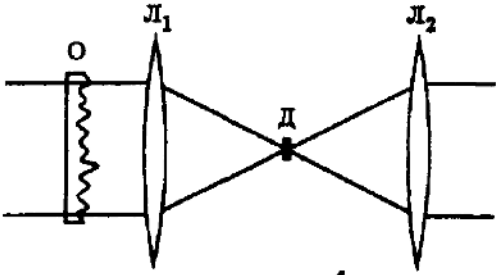


Спектр може фільтруватись за допомогою:

1) горизонтальної щілини;
2) вертикальної щілини;
3) ірисової діафрагми: проходить лише основна фур'є компонента спектру. При розширенні діафрагми можна прослідкувати етапи Фур'є-синтезу зображення;
4) круглий екран, який закриває центральну частину фур'є спектру: отримується зображення з обернутим контрастом

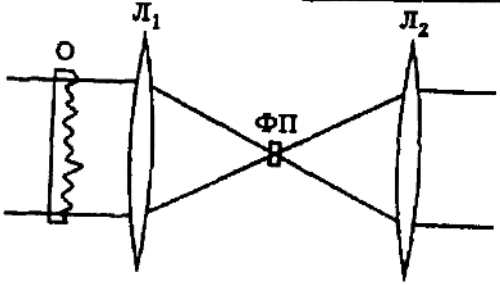
165

Метод темного поля (метод свілей)



О – об'єкт прозорий
Внесення непрозорого диску Д призводить до того, що освітленість екрану сильно зменшується: виникає „темне поле". На фоні „темного поля" стає видним структура об'єкту

Метод фазового контрасту



Фриц Цернике, 1935 р.
Фазова платівка (ФП) призводить до того, що фазовий рел'єф → амплітудний рел'єф.

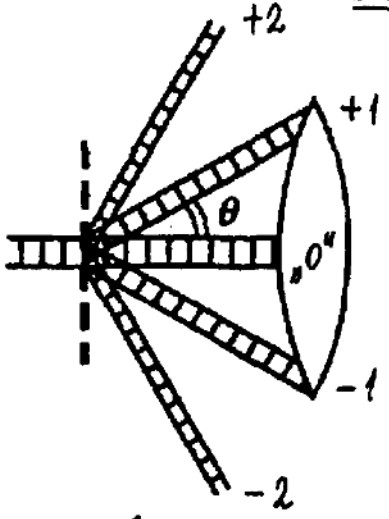
ФП здійснює зміну фази на $\frac{\pi}{2}$
Фонова хвиля, фаза якої зсунута на $\pi/2$, та сигнальна хвиля інтерферують, в результаті чого формується зображення структури об'єкта.

Метод косого падіння променів

$d \cdot \sin\varphi = m \cdot \lambda \Rightarrow$ При зменшенні d величина кутів дифракції збільшується.

При роботі із мілкими деталями предмета необхідно працювати із променями, які відхиляються на значний кут дифракції

Роздільна здатність лінзи



Мілкі деталі структури ґратки будуть спотворені через те, що інформація про них міститься в другому і більш високих порядках дифракції.

Тін період ґратки, який м.б. розділений за допомогою лінзи, відповідає випадку, коли дифр. max I порядку напрямлений точно на край лінзи.

висновок: – збільшуй ф лінзи; – розміщуй предмет ближче до лінзи.

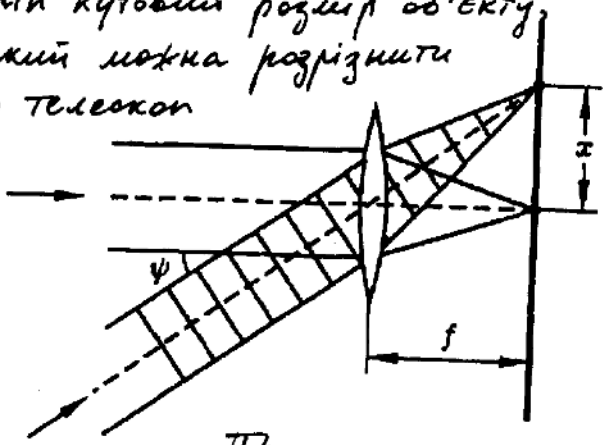
Якщо $\theta_{max} = \pi/2$, то в лінзу I max ніколи не попаде $\Rightarrow$ $d \cdot \sin\varphi = m\lambda$ $\quad m = 1;\ \sin\frac{\pi}{2} = 1$

$$\boxed{d_{min} = \lambda}$$

167

Роздільна здатність телескопу – Ψ_{min}

Ψ_{min} кутовий розмір об'єкту, який можна розрізнити в телескоп



Діафрагма приводить до того, що пляма в фокальній площині для кожного із променів має кінцевий розмір: $d = \theta_d \cdot f = \frac{\lambda}{D} \cdot f$

При малих кутах Ψ зображення зірок почнуть накладатись.

Розмір фокальної плями $d = \frac{\lambda \cdot f}{D}$ (1)

D - апертура об'єктиву

З рис. видно, що $x_{min} = d$ (2) - розмір фокальн. плями

$x_{min} = f \cdot \Psi_{min} \Rightarrow \Psi_{min} = \frac{x_{min}}{f} \overset{(2)}{=} \frac{d}{f} \overset{(1)}{=} \frac{\lambda}{D}$

$$\boxed{\Psi_{min} = \frac{\lambda}{D}}$$

Якщо $D = 6$ м, то $\Psi_{min} = 10^{-7}$ рад

$\lambda = 600$ нм

Оптична голографія

Holos (грецьк.) – весь, повний;
graphо (грецьк.) – пишу, малюю.

Ідея Г. належить Д. Габору (1948 р.)

Фотографія – плоске зображення предмета на ФПл. Реєструється та відтворюється амплітуда світлової хвилі, за допомогою якої записувалась або відтворюється інф. про тривимірний предмет, спроектована на площину.

Голографія (Г.) базується на використанні хвильових властивостей світла – законах інтерференції та дифракції: Г. дозволяє реєстр. та відтворювати амплітуду та фазу (+ поляризацію) світлової хвилі:

$$E_0^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01} \cdot E_{02} \cdot \cos(\alpha_2 - \alpha_1)$$

Розподіл інтенсивності в інтерф. картині визначається і амплітудою, і різницею фаз хвиль, що інтерферують.

Для реалізації Г. потрібно дві хвилі: сигнальна (предметна) та опорна, які когерентні між собою.

Два етапи: реєстрація (запис) Г. та відтворення (відбудова, реконструкція) Г.

1) Хвиля (предметна) відбивається, а також дифрагує на деталях предмета (модулюється по ампл. та по фазі).
2) Предметну хвилю складають (застосовують проінтерферувати) із когерентною опорною хвилею.
3) За допомогою вже тільки опорної хвилі відтворюють із інтерф. картини предметну хвилю.

Г. – зареєстрована (записана) інтерференц. картина, отримана при накладанні опорної та предметної хвиль.

169

2.

Схеми практичної реалізації голографії

Згадайте метод поділу фронту хвилі для спостереження інтерференції методом Вінника.

Схема Д.Габора

1) для голографування тільки прозорих предметів; 2) опорний та предметний промені розповсюджуються в одному напрямі.

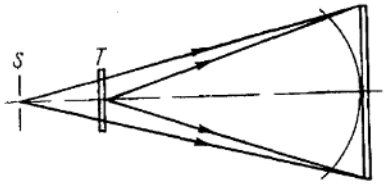


Схема Е.Лейта та Ю.Упатниекса

1) застосовується розсіяне світло (дифузне); 2) метод:
- 2-х променів;
- нахиленого опорного променя;
- позаосьовий.

- відтворення предметної хвилі: відбувається дифракція опорної хвилі на Г.;
- „дійсне зображ. має протилежний рел'єф ніж предмет;
- і „дійсне", і „уявне" зображ. спостерігаються неозброєн. оком;
- Г. відтворює ту із хвиль (будь-яку з 2-х!), яка приймала участь у запису Г.

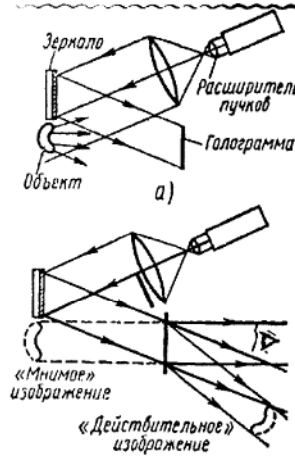
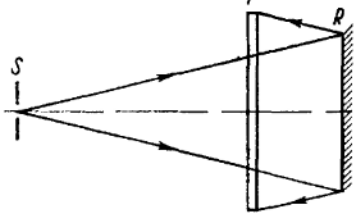
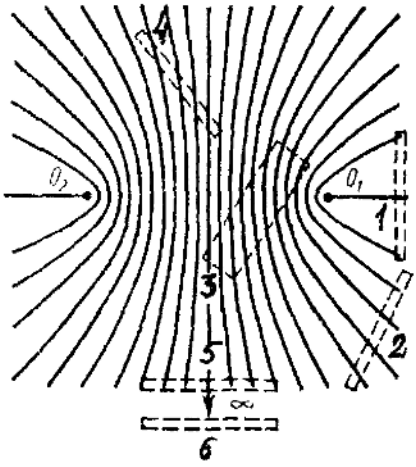


Схема Ю.Денисюка

Г. на ФПл з товстою емульсією: $d \sim 15 \div 20$ мкм (або ~30–40 довж. хв. зеленого світла. Фотошар (F) прозорий. R-дзеркало. Відтворення предметної хвилі відбувається розбіжним променем „білого" світла: багатопроменева інтерференція.



Положення ФПл при голографуванні.



ФПл можна розмістити в будь-якому місці стоячої хвилі Г. На прикладі інтерн. картини, яка створена від двох когерентних джерел: 1- по Габору; 2- по Лейту і Упатниексу; 3- по Денисюку; 4- з оберненим хвильовим фронтом; 5- Фур'є Г.; 6 – Г. Фраунгофера.

Г. записується, як правило, на звичайну ФПл, або реєструється будь-яким іншим методом, який дозволяє зареєструвати амплітуду хвилі.

Зовнішній вигляд Г. в мікроскоп в некогерентному світлі при великому збільшенні:





а- найпростішого предмета. Відстань між сусідніми смугами 5-20 мкм; б- складної сцени (зернистість фотоемульсії при такому збільшенні мікроскопу ще не спостерігається)

а. б.

Розсіяна предметом хвиля виникає при відбитті від поверхні предмета і дифракції на її деталях. Реальна Г. являє собою дуже складну і заплутану інтерфер. картину з дуже мілкими деталями без будь-якої помітної під мікроскопом або неозброєним оком закономірності, хоча в закодованій формі Г. містить повну інформацію про амплітуду та фазу розсіяної хвилі.

Відтворення (реконструкція, відбудова) предметної хвилі: тим же лазером та під тим же кутом освітлення Г., що і ФПл при її експонуванні. Відбувається дифракція опорної хвилі на Г.

Вимоги до умов отримання Г.

1) *нерухомість* (~ долей λ) всіх деталей установки (мех. жорсткість, інакше не буде високої контрастності ("розмитість" гологр. зображення).

171

2) Для Г. потрібні ФПл з високою *розд. здатністю*. Сучасні мілкозернисті ФПл – 10^3-10^4 ліній/мм. Коли розд. здатність ↑, чутливість ↓.

3) *Роль когерентності.* Різниця ходу між опорною та предм. хвилями дуже велика (до декількох метрів). Тому час когерентн. $\tau_к > 10^{-5} - 10^{-7}$ с, а $L_к$~1-10 м.

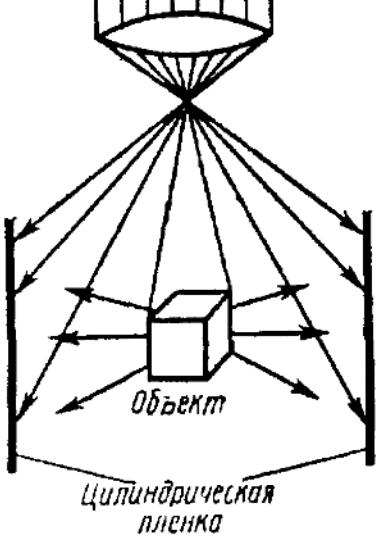
$\frac{\lambda}{\delta\lambda} \geq m_{max}$, де $m_{max} \sim \frac{L}{\lambda}$, L - лін. розмір предмету.

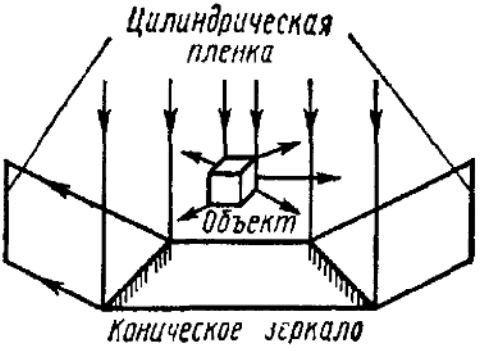
$\delta\lambda < \lambda^2 / L$. Якщо L~10 см, а λ=500 нм, то $\delta\lambda < 10^{-3}$ нм.

Для ртутної лампи $\delta\lambda$ ~30 нм. Тільки лазер!

Властивості голографії

1. ***Г. – без лінзовий спосіб*** отримання опт. зображення.
2. Зображення, яке дає Г., - ***тривимірне і панорамне*** (з ефектом паралактичного зміщення)

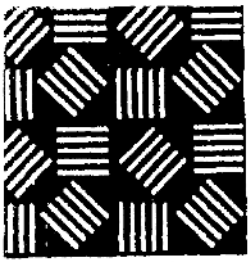




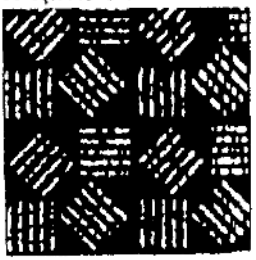
3. На одній ФПл можна зареєструвати ***декілька*** (реально до 100). ***накладених одне на друге зображень*** без помітного взаємного впливу.

4. Можна отримати ***кольорове зображення***, освітлюючи Г. трьома різними лазерами (Г. на чорно-білій ФПл. !).

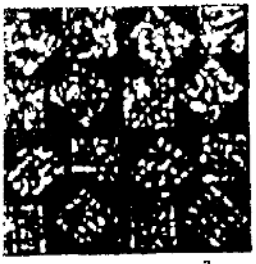
5. *Частина Г. діє як ціла Г.*



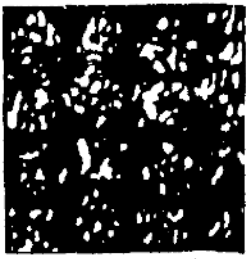
5 × 5 мм²



2,5 × 2,5 мм²



1,25 × 1,25 мм²



0,5 × 0,5 мм²

6. Г. має ***асоціативний характер*** Г. При реєстрації об'єкту O_1 об'ємної Г. випромінювання кожної його точки можна розглядати, як опорне відносно до всіх інших точок O_1. Якщо отриману таким способом голограму відтворити випромінюванням *частини* точок записаного на ній об'єкту (наприклад, випромінюванням вістря об'єкта O_1), то це випромінювання відтворить зображення *всіх* точок об'єкта, відносно яких воно було опорним, тобто зображення об'єкта в цілому. Таким чином, тривимірна голограма за фрагментом записаної на ній інформації здатна "згадати за асоціацією" всю інформацію про об'єкт у цілому.

*7. **Поляризаційна Г.*** Г. здатна реєструвати та відтворювати не лише амплітуду, фазу і довжину хвилі, а і стан поляризації об'єктної хвилі. При запису Г. поляризації опорної та об'єктної хвиль можуть бути різними аж до їх взаємної ортогональності. Інтерференційна картина в такому випадку характеризується модуляцією стану поляризації поля, голограму якого записують. Неозброєне людське око не розрізняє ці стани. Але якщо таку картину зареєструвати на світлочутливому середовищі, яке реагує на стан поляризації випромінювання, наприклад, анізотропією коефіцієнта поглинання, то можна записати поляризаційну Г. На ній одночасно записуються

173

дві періодичні структури, які зсунуті на 1/2 періоду інтерференційної картини і відповідають взаємно ортогональним лінійним станам поляризації. Це неначе дві голограми, записані на одному носієві. Відповідно при реконструкції поляризаційної Г. відтворюються дві об'єктні хвилі, які зсунуті на 1/2 періоду і поляризовані ортогонально одна до одної і під кутом 45^0 відносно до поляризації опорної хвилі. У поляризаційній Г. відтворюється повна інформація про об'єкт, включаючи стан поляризації розсіяного ним поля. Тим самим практично завершилась побудова основ голографії, як метода запису та відтворення всіх без виключення характеристик хвильового поля.

8. Динамічна Г. на відміну від статичної Г. існує лише на момент дії опорного та предметного променів, вона не потребує процедури фіксації зображення. Динамічну Г. формують у нелінійному світлочутливому середовищі безпосередньо в момент, коли на нього діє хвильове поле. При цьому використовується зворотний зв'язок між хвилями, що записуються, та голограмою, що ними записується. Іншими словами, у процесі запису відбувається і зчитування інформації. Записана інформація зразу ж, спонтанно починає стиратись, що дозволяє записувати і зчитувати нову інформацію. Суттєвим у динамічній Г. є запізнення в ній зворотного зв'язку між променем запису та записаною голограмою. Інформація, яка міститься у деякій момент часу в промені, визначає характеристики середовища, які в свою чергу впливають на параметри наступної у часі частини променя. Це створює можливість динамічного, в реальному часі управління параметрами як світлових променів, так і інформації, яку вони несуть. На основі динамічних голографічних перетворень розробляються логічні елементи комп'ютерів з швидкодією до 10^{-12} с, що наближається до граничного значення цієї характеристики, яке пов'язане з порядком періоду світлової хвилі (10^{-14} - 10^{-15} с).

9. "Хвилеводна Г." пов`язаний з безпосереднім використанням хвилеводних мод тонкоплівкових хвилеводів як опорного, сигнального та відтворюючого пучків. При цьому взаємодія мод з реєструючим середовищем відбувається безпосередньо, без етапу перетворення їх у випромінювання вільного простору. Саме реєструюче середовище є елементом тонкоплівкового хвилеводу,

воно розташоване вздовж напрямку розповсюдження хвилеводних мод.

10. Г. принципово ***менш чутливі до дефектів*** порівняно із неголографічним побітовим або аналоговим записом інформації. Це пов'язане з однією з основних властивостей Г., яка характеризує тільки цей спосіб запису - не тільки вся субголограма, але і кожний її фрагмент має властивість відтворювати записану на ній інформацію. Однак при цьому, слід мати на увазі, що, чим більша частина субголограми використовується для відтворення, тим вища точність відтворення. Обмеження Г. за площею призводить до зменшення розділення мілких деталей, а обмеження за глибиною знижує точність спектрального (кольорового) відтворення. При наявності на Г. пилу, подряпин, інших дефектів інформаційні втрати проявляються у вигляді зменшення чіткості границь та кількості градацій яскравості між окремими елементами зображення. Це дозволяє казати про надзвичайно високу ***перешкодостійкість та надійність*** голографічного запису;

11. Виконуються не послідовні, а ***паралельні процеси запису та зчиту-вання інформації*** у вигляді окремих субголограм розміром ~ 10^4 - 10^5 біт;

12. ***Час звертання*** до будь-якої з субголограм складає ~1 мкс;

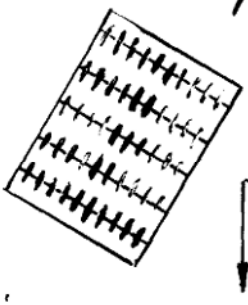
Оптика анізотропних середовищ.

I. Експеримент

В природі існують речовини, розповсюдження хвиль в яких відбувається за законами, відмінними від тих, якими описується поведінка ізотропних середовищ: формулами Френеля і законом Снелліуса.

Це - анізотропні середовища. Їх властивості обумовлені: - особливостями їх молекул (атомів);
- особливостями їх кристалічної ґратки.





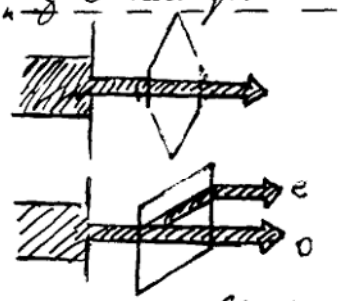
Рахівниця - модель анізотр. середовища

Модель, яка пояснює анізотропні властивості електрона в кристалі

Основні експериментальні факти

1670 р. - Бартоліні, 1690 р - Гюйгенс „Трактат про світло"

1) Незвичайне заломлення в кристалах із Ісландії" - $CaCO_3$



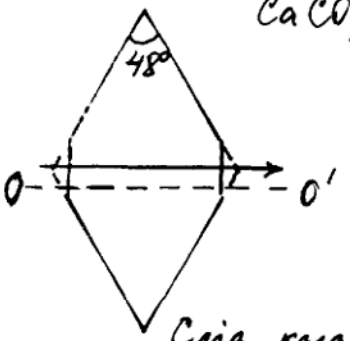
2) Навіть при нормальному падінні світла на межу відбувається заламлення - незвичайний („e") промінь.

В кристалах з кубічною симетрією кристал. ґратки двопроменев. не відбув.

3) „e" промінь може не лежати в площині падіння.

4) В кристалі існує оптична вісь (OO'), вздовж якої двопроменезаломлення відсутнє.

Площина, в якій лежить OO' і падаючий промінь, називається головною площиною (або головним перерізом).



В природі існують кристали з однією та з двома OO': одновісні та двовісні кристали. Слюда – двовісний кристал. Ісландський шпат ($CaCO_3$) – одновісний кристал.

Слід казати про OO' як про напрямок, а не як про лінію!

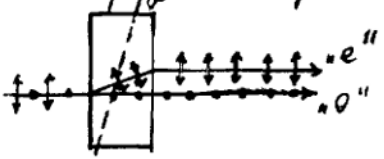
5) Для „o" променя показник заломл. $n_o \neq n_o(i)$ де i – кут падіння.

Для „e" променя $n_e = n_e(i)$.

Для $\lambda = 5893$ Å (жовтий дублет Na) в $CaCO_3$:

$n_o = 1.658$; $1.486 < n_e < 1.658$ (верхня межа n_e дорівнює значенню n_o).

6) Обидва промені („o" і „e") повністю поляризовані. Їх поляризації ортогональні.



Коливання вектора $\vec{E}$ в „o" промені перпендикулярні до площ. головного перерізу.

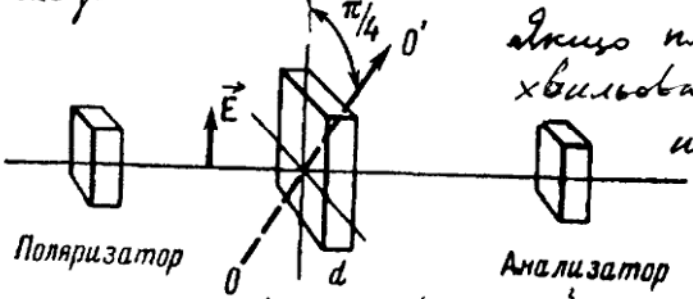
„e" – Промінь поляризован в головній площині

7) При розповсюдженні променя в напрямку, перпендик. до OO', двопроменезаломлення відсутнє (як і для напрямку $\parallel$ OO'), хоча $|n_e - n_o|$ набуває max знач.

177

Це означає, що в одному напрямку розповсюджуються дві лін. поляризовані хвилі ($\vec{E}_o \perp \vec{E}_e$) з різними фазовими швидкостями: $v_o = \frac{c}{n_o}$ та $v_e = \frac{c}{n_e}$ $\Rightarrow v_o \neq v_e$. В залежності від товщини (d) пластинки промені вийдуть із неї з деякою різницею фаз (δ).

Якщо $\delta = 0, \pi, \ldots$, то результуюча хвиля буде лінійно поляризованою. Для інших значень δ на виході – хвиля з еліптичною поляризацією.



Якщо пластівка – "чвертьхвильова" ($\lambda/4$) – така, що $\Delta = d(n_o - n_e) = (m + \frac{1}{4})\cdot\lambda$, то

$\delta = \Delta \cdot k =$

$= (4m+1)\frac{\lambda}{4} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} =$

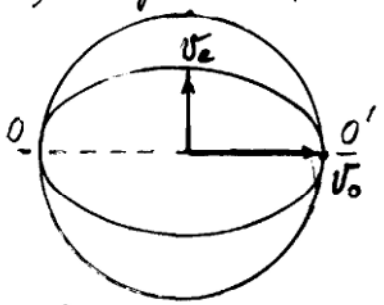
$= (4m+1)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$

$\Delta = d(n_o - n_e) = (4m+1)\lambda/4$

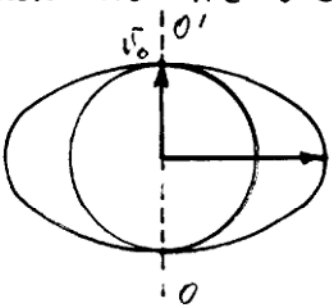
$\widehat{\vec{E}, OO'} = 45°$, щоб $|\vec{E}_o| = |\vec{E}_e|$

Лінійно поляриз. світло на вході → циркулярно поляризоване світло на виході.

8) Є кристали, в яких $n_o > n_e$ і в яких $n_o < n_e$



Додатній анізотропний кристал: $v_o > v_e$
Кварц, TiO_2, HgS



Від'ємний анізотропний кристал: $v_o < v_e$ $(n_o > n_e)$
$CaCO_3$, турмалін, апатит

$v = \frac{c}{n}$! Не плутати n_e та v_e !

$v_o \neq v_o(\varphi)$

$v_e = v_e(\varphi)$

$\varphi = \widehat{\vec{k}\,\vec{OO'}}$

Оптика анізотропних середовищ. (Кристалооптика). II. Теорія.

Структура світлової хвилі в анізотропному середовищі.

В лінійному середовищі (незалежно від того - ізотропно воно чи анізотропно) визначається рівняннями Максвелла:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} & \operatorname{rot}\vec{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \operatorname{div}\vec{D} &= 0 & \operatorname{div}\vec{H} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Для плоскої хвилі: $\vec{E} = \frac{1}{2}\vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} + \text{к.с}$

$$\left.\begin{aligned} \vec{H} &= \frac{1}{2}\vec{H}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} + \text{к.с.} \\ \vec{D} &= \frac{1}{2}\vec{D}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} + \text{к.с.} \end{aligned}\right| \quad (2)$$

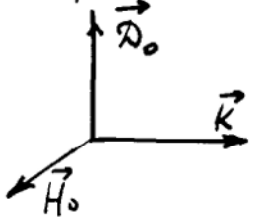
де $\vec{E}_0, \vec{H}_0, \vec{D}_0$ – комплексні амплітуди.

$(2) \to (1)$: $[\vec{k}, \vec{E}_0] = \frac{\omega}{c}\vec{H}_0$; (3)

$[\vec{k}, \vec{H}_0] = -\frac{\omega}{c}\vec{D}_0$ (4)

$(\vec{k}, \vec{D}_0) = 0$ (5) $\qquad (\vec{k}, \vec{H}_0) = 0$ (6)

Із (4)-(6) видно, що $\vec{D}_0, \vec{H}_0, \vec{k}$ утворюють праву трійку взаємно перпендикулярних векторів:



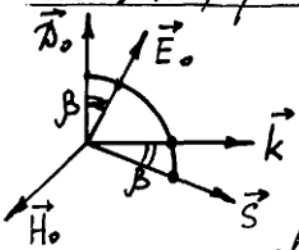
Залишається вектор $\vec{E}_0$, який фігурує тільки в (3).

$\vec{E}_0 \perp \vec{H}_0 \Rightarrow$ вектор $\vec{E}_0$ лежить в площині векторів $\vec{D}_0$ і $\vec{k}$, але, взагалі кажучи, $\vec{E}_0 \not\parallel \vec{D}_0$!

Примітка: відомо, що $\vec{E}$ входить в вектор Умова - Пойнтінга $\vec{S} = \frac{c}{4\pi}[\vec{E}, \vec{H}]$.

179

Всі 4 вектори: $\vec{D}_0, \vec{E}_0, \vec{k}, \vec{S}$ лежать в одній площині, до якої вектор $\vec{H}_0$ перпендикулярний.



Кут $\beta = \vec{D}_0\vec{E}_0 = \vec{k}\vec{S}$ – кут анізотропії;
$\vec{k}$ – нормаль до хвильового фронту;
$\vec{S}$ – напрям світлового променя.

Непаралельність векторів $\vec{E}_0$ та $\vec{D}_0$ світлової хвилі обумовлює специфічні оптичні властивості анізотропних кристалів.

В анізотропному середовищі при розповсюдженні в ньому світл. хвилі на електрони діють змін. сили, напрямлені вздовж $\vec{E}$ хвилі. Однак електрони зміщуються в іншому напрямку, який визначається структурою кристалу – вздовж $\vec{D} \parallel \vec{P}$

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} = \vec{E} + 4\pi\chi_{ij}(\omega)\cdot\vec{E} \Rightarrow \vec{D} = \varepsilon_{ij}(\omega)\cdot\vec{E}$$

$\varepsilon_{ij}(\omega)$ – тензор діел. проникності лінійного анізотр. середовища

Якщо декартову СК обрати не довільно, а спеціально (така СК існує завжди), то тензор ε_{ij} можна діагоналізувати:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

Такі осі x, y, z назив. головними осями координат. Одна з головних осей направлена вздовж $\vec{P}$, а напрямок 2-х інших – довільний.

В головних осях співвідношення такі:
$\vec{D}_x = \varepsilon_{xx}\vec{E}_x$; $\vec{D}_y = \varepsilon_{yy}\vec{E}_y$; $\vec{D}_z = \varepsilon_{zz}\vec{E}_z$

В залежності від співвідношень між ε_{ii} крис-тали діляться: – ізотропні ($\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz}$);
– одновісні ($\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} \neq \varepsilon_{zz}$); – двовісні ($\varepsilon_{xx} \neq \varepsilon_{yy} \neq \varepsilon_{zz}$)

180

3.

В обл. прозорості кристали характеризуються тим, що $n = \sqrt{\varepsilon}$.

Одновісний кристал має 2 головних показника заломл. $n_o = \sqrt{\varepsilon_{xx}} = \sqrt{\varepsilon_{yy}}$; $n_e = \sqrt{\varepsilon_{zz}}$

Двовісний кристал має 3 головних показника заломл.: $n_x = \sqrt{\varepsilon_{xx}}$; $n_y = \sqrt{\varepsilon_{yy}}$; $n_z = \sqrt{\varepsilon_{zz}}$

В одновісному кристалі, якщо $n_o < n_e$ – кристал додатній; якщо $n_o > n_e$ – кристал від'ємний.

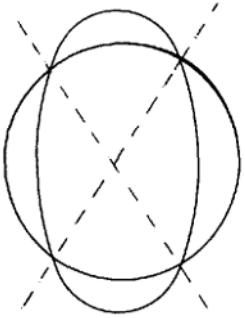
Наприклад: 1) Одновісні кристали

Додатні:	n_o	n_e	Від'ємні:	n_o	n_e
Льод	1.309	1.310	$LiNiO_3$	2.300	2.208
Кварц	1.544	1.553	$NaNO_3$	1.587	1.336
Рутил	2.616	2.903	Пруститт	3.019	2.739

2) Ізотропні кристали: CdTe $n = 2.69$

NaCl $n = 1.544$; Алмаз $n = 2.417$; GaAs $n = 3.40$

3) Двовісні кристали	n_x	n_y	n_z
Гіпс	1.520	1.523	1.530
Польовий шпат	1.522	1.526	1.530
Слюда	1.552	1.582	1.588
Топаз	1.619	1.620	1.627

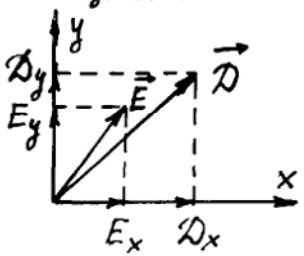


Про двовісні кристали можна прочитати: Білий ... с. 249-251
Таджаєв ... с. 259

Власні стани поляризації світлової хвилі в анізотропному середовищі

Можна показати, що світлова хвиля з довільним станом поляризації ($\vec{D}$ не напрямлений вздовж ні однієї з головних осей) в анізотропному кристалі нестійка: вона розпадається на дві лінійно поляризовані, ортогональні хвилі, які розповсюджуються із різними фазовими швидкостями.

Ці стани поляризації назив. власними станами пол.



$$\vec{D} = \vec{x}_0 D_x + \vec{y}_0 D_y$$

По мірі розповсюдження хвилі в кристалі різниця фаз між ортогональними компонентами поля буде змінюватись. Тобто: хвиля буде поляризована по еліпсу і параметри еліпсу будуть змінюватись.

Як аналітично описати цю залежність? Для одновісного кристалу:

Якщо $\vec{k} \parallel 00'$ (опт. вісь) $\parallel OZ$ (головна вісь кристалу), то хвиля зберігає свою поляризацію і розповсюджується з однією швидкістю; $\vec{D} \parallel \vec{E}$; вектори $\vec{E}, \vec{D}, \vec{k}$ лежать в одній площині (в силу рівнянь Максвелла).

Якщо $\vec{k} \nparallel 00' \parallel OZ$, то:

1) $D_x = \varepsilon_{xx} E_x$; $D_y = \varepsilon_{yy} E_y$; $D_z = \varepsilon_{zz} E_z$, або
$D_x = n_o^2 E_x$; $D_y = n_o^2 E_y$; $D_z = n_e^2 E_z$ (1)

2) змішаний добуток $(\vec{k}[\vec{E}\vec{D}]) = 0$ (2) – випікає з рівнянь Максв.

(1) та (2) незалежні один від одного.

Обидва ці рівняння виконуються не для будь-яких хвиль, а лише для вибраних поляризацій, які наз. власними

$$[\vec{E},\vec{D}] = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ E_x & E_y & E_z \\ n_0^2 E_x & n_0^2 E_y & n_e^2 E_z \end{vmatrix}$$

$OO' \parallel Oz \Rightarrow [\vec{E},\vec{D}] \perp Oz \Rightarrow (\vec{z}_0[\vec{E},\vec{D}]) = 0 \Rightarrow$
$\vec{z}_0, \vec{E}, \vec{D}$ – компланарні.

Умови (1) та (2) виконуються у двох випадках:

1) якщо $\vec{D} \parallel \vec{E} \Rightarrow [\vec{E},\vec{D}] = 0$ (3)

2) якщо $\vec{D}$ лежить в пл. векторів $\vec{z}_0$ та $\vec{k}$, що математично можна записати у вигляді $(\vec{z}_0[\vec{k},\vec{D}]) = 0$.

Вводять поняття головної площини – пл., в якій лежать вектори $\vec{z}_0$ та $\vec{k}$ (опт. вісь та хвильовий вектор).

Висновки (підсумки):

1) для будь-якого $\vec{k}$ в одновісному анізотропному кристалі існує 2 дозволених („власних") напрямки світлової хвилі. Один з них $\perp$ головній пл., другий – їй паралельний;

2) хвиля з довільним станом поляризації розпадається в кристалі на 2 лінійно поляриз. хвилі із взаємно ортогональними поляризаціями („власними" поляр.);

3) швидкості розповсюдження цих („власних") хвиль різні;

4) швидкість звичайної хвилі не залежить від напрямку розповсюдження і дорівнює $v_0 = c/n_0$

5) швидкість незвичайної хвилі залежить від напрямку розповсюдження в кристалі і лежить у межах між c/n_o та c/n_e.

Швидкість розповсюдження незвичайної хвилі. Еліпсоїд показника заломлення

незвич. хвиля розповсюдж. вздовж $\vec{k}$. Вектор $\vec{k}$ не співпадає ні з одним із напрямків головних осей.

Задача: визначити $v = v(\vec{k})$.

Без доведення: 1) Для звичайної хвилі $\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = n_o^2 \vec{E}$

$$n_o = c \cdot \frac{k}{\omega} = c \frac{1}{v_o} \Rightarrow v_o = \frac{c}{n_o}$$

Для звичайної хвилі фазова шв. не залежить від напрямку.

2) Для незвичайної хвилі: $\vec{D} \nparallel \vec{E}$; $(\vec{E}, \vec{k}) \neq 0$

Якщо напрямок розповсюдження хвилі х-ти кутом φ, де φ - кут між $\vec{k}$ та OO' кристалу, то

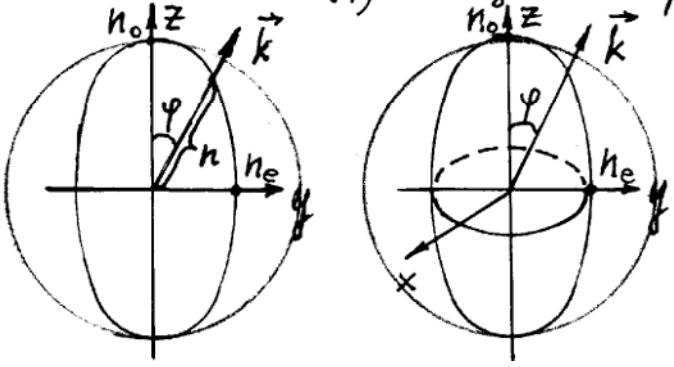
$$\frac{\sin^2\varphi}{n_e^2} + \frac{\cos^2\varphi}{n_o^2} = \frac{1}{n^2(\varphi)}$$

Значення n_o та n_e визначаються вздовж головних осей.

(A) $$n(\varphi) = \frac{n_o \cdot n_e}{\sqrt{n_e^2 \cdot \cos^2\varphi + n_o^2 \cdot \sin^2\varphi}}$$

Знаючи $n(\varphi)$, розраховують $v(\varphi) = \frac{c}{n(\varphi)}$

Залежність $n(\varphi)$ показана на рис.

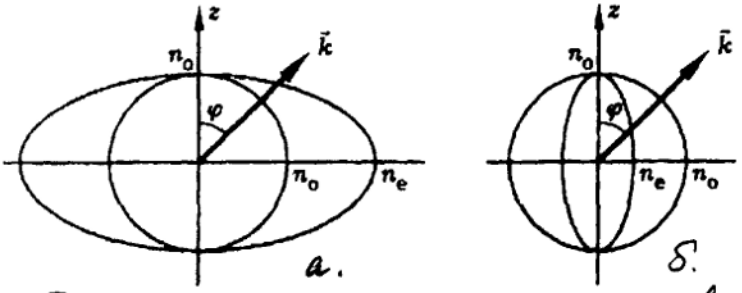


Еліпс і еліпсоїд показника заломл. Напівосі - n_o та n_e

від'ємний анізотр. кристал

Подвійне променезаломлення світла на границі з анізотропним середовищем

Перерізи сфери і еліпсоїду показників заломлення для додатного (а) і від'ємного (б) одновісного анізотропного кристалу

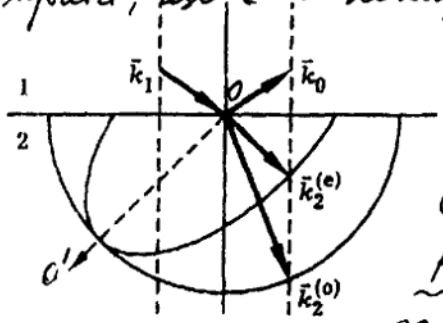


Граничні умови для ел.м. поля вимагають неперервності tg- (тобто паралельних границі поділу) компонент ел.м. поля: $E_{t_1} = E_{t_2}$; $H_{t_1} = H_{t_2}$ (1)

Як і у випадку з ізотропними середовищами, з (1) витікає рівність tg-компонент хвильових векторів відбитої та заломленої хвиль: $k_{1x} = k_{0x} = k_{2x}$ (2)

Закон відбиття залишається в силі: $\theta_1 = \theta_0$.

Закон заломлення теж залишається, але треба враховувати, що є 2 показника заломлення n_o та n_e:

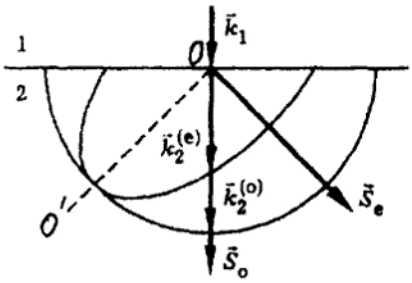


$$\begin{cases} n_1 \cdot \sin\theta_1 = n_2^{(o)} \cdot \sin\theta_2^{(o)} \\ n_1 \sin\theta_1 = n_2^{(e)} \cdot \sin\theta_2^{(e)} \end{cases}$$

Опт. вісь OO' лежить в пл. падіння.

Аналіз: 1) Як видно з рис., кути заломлення для „o" та „e" променів різні. 2) Вектор Умова-Пойнтінга $\vec{S} = \frac{c}{4\pi}[\vec{E}, \vec{H}]$ не співпадає за напрямком з $\vec{k}$. Саме цим пояснюється ефект заломлення в анізотр. крист. при нормальному падінні (див. наступний рис.).

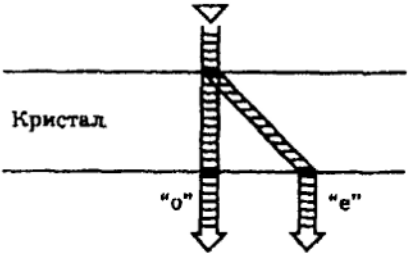
185



для нормального падіння

$k_{1x} = k_{ox} = k_{2x} = 0$ – із (1)

Тобто: хвильові вектори в кристалі, як і хв. вектор падаючої хвилі, напрямлені перпендикулярно до межі.



3) Як знайти напрямки „o" та „e" променів?:

Напрямок „e" променя співпадає з малою напівосею еліпса показника заломлення $n(\varphi)$, а останній будується за законом (A). Цей напрямок-перпендикулярний до OO'.

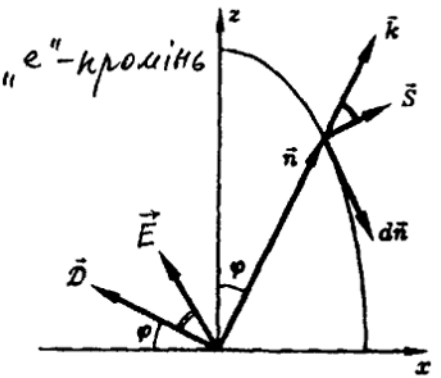
Напрямок „o" променя визначається за законом Снеліуса

4) Попередній розгляд проводився у припущенні, що OO' лежить в пл. падіння. В цьому випадку заломлений промінь теж лежить у пл. падіння. А якщо OO' не лежить в пл. падіння? Тоді заломлений „e" промінь не буде лежати в пл. падіння, через те, що він завжди повинен знаходитись в головній площині.

Тобто: заломлення світла в анізотропному кристалі відбувається не завжди в пл. падіння.

186

5) Як визначити напрямок „e"-променя при довільному куті падіння променя (φ) на межу розділу? (п. 3 стосувався нормального падіння).



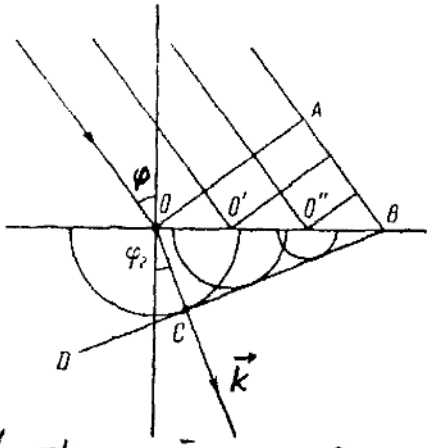
Відповідь: в одновісному анізотропному кристалі „e"-промінь напрямлений по нормалі до еліпсоїду показника заломлення: вектор $\vec{S} = 4\pi/c\,[\vec{E}, \vec{H}] \perp$ до дотичної в точці $n(\varphi)$ (див. рис.).

З рис., крім того, видно, що:

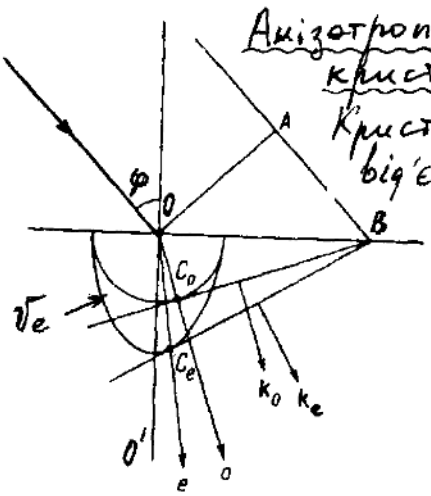
- кут $\hat{\vec{k}\vec{S}}$ = кут $\hat{\vec{D}\vec{E}}$ - кут анізотропії;
- $\vec{S} \perp \vec{E}$; $\vec{k} \perp \vec{D}$;
- $\vec{E} \parallel d\vec{n}$ ($\vec{S} \perp d\vec{n}$), де $d\vec{n}$ - дотична до еліпсоїду показника заломлення в точці $n(\varphi)$. Фізичний зміст $d\vec{n}$ пов'язаний із приростом вектора $\vec{n}$, яке виникає при збільшенні кута φ на величину $d\varphi$.

Побудова Гюйгенса

Гюйгенс постулював, що кожна точка, до якої доходить світлове збудження, може розглядатись, як центр відповідних вторинних хвиль. Для побудови хвильового фронту в наступні моменти часу слід побудувати огинаючу цих вторинних хвиль.



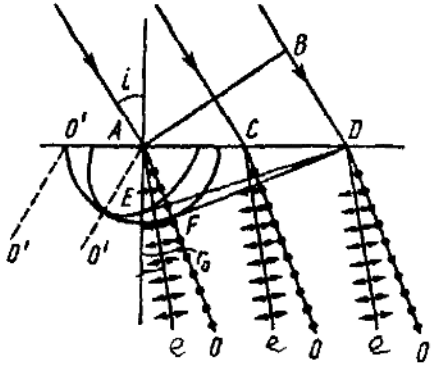
Ізотропний кристал

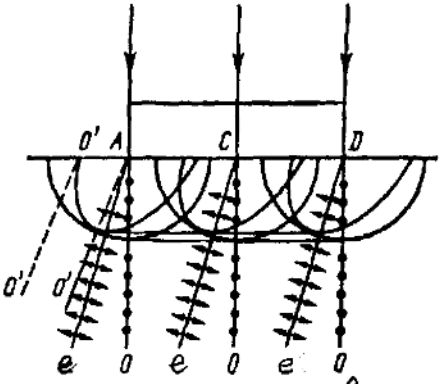


Анізотропний кристал. Кристал – від'ємний

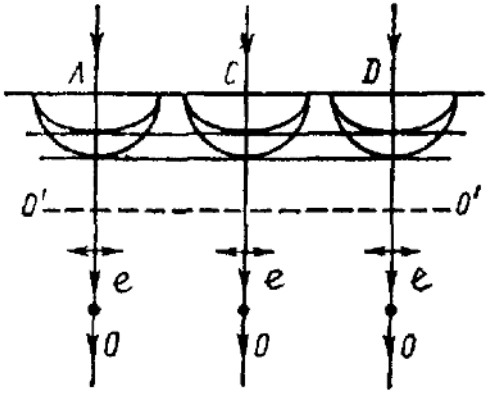
Головна площина співпадає з площиною малюнку

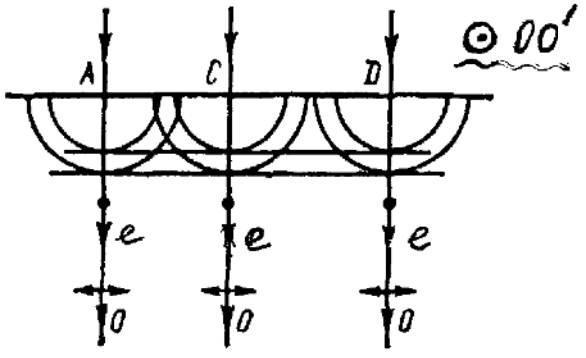
Як знайти поляризацію хвиль в анізотропному кристалі? Вектор $\vec{E}$ для "е"-хвилі завжди лежить в головній площині. Вектор E для "о"-хвилі – перпендикулярний до головної площини.





"е"-промінь не перпендикулярний до хвильового фронту!





$V_o > V_e$ – для додатнього кристалу

188

Зауваження: побудова Гюйгенса дає напрямок $\vec{k}$ (положення хвильового фронту, нормалі до нього), а не напрямок променів (напрямок $\vec{S}$). На дошці ми спостерігаємо безпосередньо за поведінкою променів, а не за нормалями до хвиль. Але треба враховувати, що: 1) побудова Гюйгенса – проста і наглядна – в ряді випадків надзвичайно полегшує правильний розв'язок задачі; 2) треба враховувати, що кут між $\vec{k}$ та $\vec{S}$ – невеликий.

Поляризоване світло: одержання, властивості, аналіз, використання

Поляризатори – пристрої для перетворення природного або частково поляризованого світла в лінійно поляризоване.

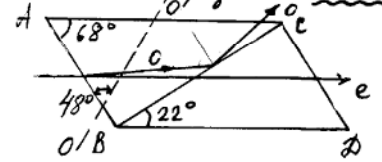
Поляризатори і аналізатори.

За принципом дії: 1) відбивання під кутом Брюстера; 2) заломлене світло – частково поляризоване ⇒ Стопа Столетова; 3) явище дихроїзму в деяких анізотропних середовищах (плівках) – поляроїди; 4) поляризаційні призми, основані на явищі двопроменезаломлення.

Поляризаційні призми

а) однопроменеві:

Першу поляриз. призму винайшов Ніколь (1828р.). На його честь названа ніколем



З ісландського шпату: $CaCO_3$

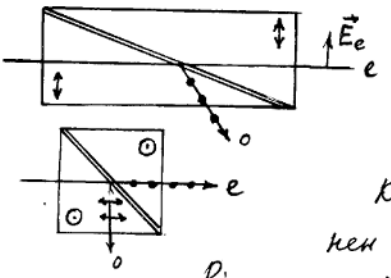
$\frac{AB}{AC} = 3.65$

Склейка по BC ізотропним канадським бальзамом $n = 1.550$ для $\lambda = 589$нм

Для „о" променя виконуються умови повного відбиття ($n_o > n$)

Для „е" променя ($n_e < n$) – ПВВ немає.

Призма Глана (Глана-Фуко)



$n_e < n_{склей} < n_o$

в якості склейки – гліцерін (УФ), Канадський бальзам (видиме світло), Масло, повітря.

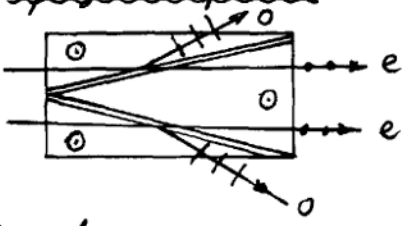
Кут падіння на поверхню розділу повинен бути більшим за граничний кут ПВВ.

Різниця кутів нахилу між крайніми променями падаючого пучка, які задовольняють такі умови, визначає апертуру повної поляризації призми.

Для призми Фуко умови ПВВ виконуються для „о" і для „е" променів: $n_{гр} < n_e < n_o$. Тому призму Фуко роблять короткою для того, щоб кут падіння „е" променя на поверхню поділу був меншим від граничного кута ПВВ, а для „о" променя – більшим за нього. При цьому апертура повної поляризації становить всього 8°.

190

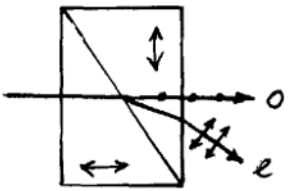
Призма Аренса



Використовується для підсвітки в поляриз. мікроскопах: дає широкий промінь.

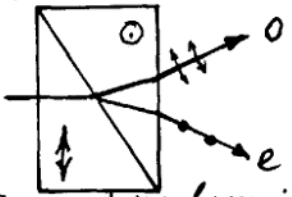
б) двопроменеві поляризаційні призми:

Призма Томсона



„O" промінь – ахроматичний
Кут відхилення „e" променя залежить від кольору світла.

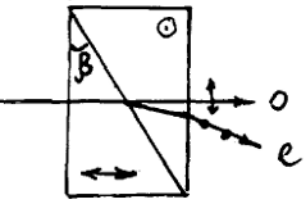
Призма Волластона



Промені на виході симетричні

Через те, що OO' в різних половинах призми перпендикулярні, промінь звичайний в I половинці стає незвичайним в II половинці призми.

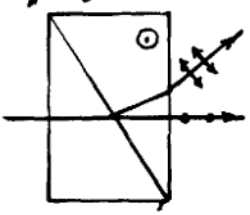
Призма Рошона



„e" промінь виходить під кутом

$$\theta = (n_o - n_e) \cdot tg\,\beta$$

Призма, яка виготовлена із скла та ісландськ. шпату



Близькість показників заломлення скла (1.49) та $n_e = 1.486$ ⇒ промінь проходить через призму практично не заломлюючись; $n_{склей} \approx n_e$

191

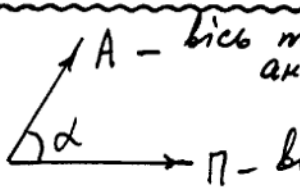
Матеріали для поляризаційних призм:
ісландський шпат, кварц, турмалін

Турмалін: - від'ємний кристал, одновісний;
- має сильне селективне поглинання одного з променів (звичайного). Для $d \sim 1$ мм з кристалу виходить практично один (незвичайний) промінь - дихроїзм.

Характеристики поляризаційних призм

1) з якого матеріалу зроблена (це визначає спектр. область);
2) коеф. пропускання ($T \sim 40\%$; $T_{max} = 50\%$);
3) ступінь поляризації ($\rho \sim 98\%$);
4) апертура - max кут розходження падаючого променя, коли призма дає 100% теоретичну ступінь поляризації.

Закон Малюса

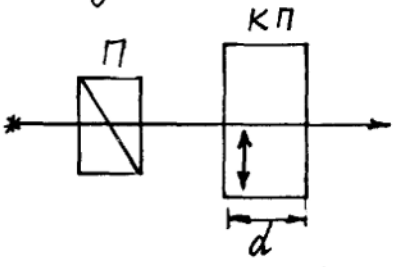


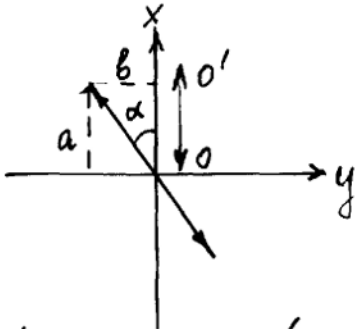
J_0 - інтенс. лін. поляр. світла, що виходить з поляризатора;
$J_{пр}$ - інтенс. світла, що виходить з аналіз.

$$J_{пр} = J_0 \cos^2 \alpha$$

Якщо на поляризатор падає природне світло з інтенс. $J_{вх}$, то після аналізатора $J_{пр} = \frac{1}{2} J_{вх} \cos^2 \alpha$

Взаємодія ортогонально поляризованих променів. Фазові платівки





В КП „o" і „e" промені проходять в одному напрямку, але з різними швидкостями.

Після П площина коливань $\vec{E}$ утворює кут α з OO'.

Ампл. звич. хвилі $a = A \cdot \cos\alpha$

Ампл. незвич. хвилі $b = A \cdot \sin\alpha$

де A – ампл. коливань хвилі, що падає на КП

$$\Delta = (n_o - n_e) \cdot d$$

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e) \cdot d$$

На виході з КП: $x = a \cdot \cos\omega t$; $y = b \cdot \cos(\omega t - \varphi)$

$y = b(\cos\omega t \cdot \cos\varphi + \sin\omega t \cdot \sin\varphi)$ та $\cos\omega t = \frac{x}{a}$ (1)

$y = b\left(\frac{x}{a}\cos\varphi + \sin\omega t \cdot \sin\varphi\right)$

$\sin\omega t \cdot \sin\varphi = \frac{y}{b} - \frac{x}{a}\cos\varphi$ (2)

Підносячи до квадрата (1) та (2) та додаючи їх:

$\cos^2\omega t \cdot \sin^2\varphi = \frac{x^2}{a^2} \cdot \sin^2\varphi$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cdot \cos\varphi = \sin^2\varphi}$$

Результуюче коливання після КП буде еліптичним.

Форма і орієнтація еліпсу залежить від α і φ.

Світло після КП – еліптично поляризоване.

193

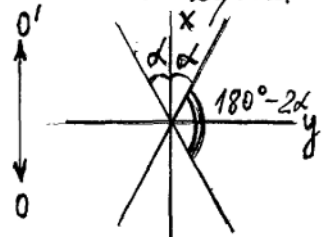
$\lambda/4$ – фазова платівка

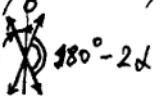
Якщо товщина d платівки задовольняє умові
$(n_o - n_e)\cdot d = \lambda/4$ або $(n_o - n_e)\,d = \left(m + \frac{1}{4}\right)\lambda$
де m – ціле число, то $\varphi = \frac{\pi}{2} + 2m\cdot\pi$
Тоді рівняння еліпсу набуває вигляду
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$ тобто воно зведене.

Якщо при цьому $\alpha = 45°$, то $a = b$ і $x^2 + y^2 = a^2$.
В цьому випадку світло поляризоване по кругу (колу).
Потрібно, щоб додавались дві когерентні хвилі з однаковими амплітудами, поляризовані у взаємно перпендикулярних площинах з різницею фаз, що дорівнює $\frac{\pi}{2}$.
В залежності від того, компонента вздовж ox випереджає компоненту вздовж oy або відстає від неї на $\frac{\pi}{2}$ за фазою, кажуть про обертання результуючого вектора проти годинникової стрілки або за нею. Розрізняють ліву і праву кругову (еліптичну) поляризацію.

$\lambda/2$ – фазова платівка.

Товщину d підбирають так, що $(n_o - n_e)\cdot d = \frac{\lambda}{2}$ або
$(n_o - n_e)\cdot d = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \Rightarrow \varphi = \pi$.
При умові, що $\varphi = \pi$ еліпс вироджується в дві прямі, що збігаються: $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 = 0$
$y = -\frac{b}{a}\cdot x$
Світло залишається лінійно поляризованим, але орієнтація площини коливань $\vec{E}$ змінюється від такої, яка визначається кутом α, до такої, що визначається кутом $180° - 2\alpha$





194
6.

Фазова платівка у цілу довжину хвилі задовольняє умову $(n_o - n_e)d = \lambda$ або $(n_o - n_e)d = m\lambda$, що дає $\varphi = 2\pi$. При цьому еліпс вироджується у пряму

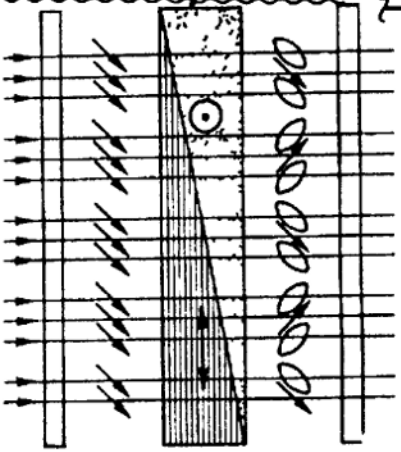
$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 = 0 \Rightarrow y = \frac{b}{a} \cdot x$$

Світло залишається лінійно поляризованим без зміни площини поляризації.

Аналіз стану поляризації

Треба вміти розрізнити і виміряти параметри: лінійно поляризованого світла, циркулярно- та еліптично поляризованого, світла природного та циркулярно поляр., еліптично- та частково-поляриз.

Компенсатор Бабіне

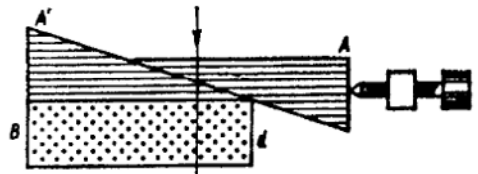


2 клина, виготовлені із кварцу із взаємно перпендикул. ОО'. Промінь світла проходить в клинах різні шляхи: d_1 та d_2. Звичайний промінь в I клину стає незвичайним променем в II клину. і навпаки. Додаткова різниця ходу $\Delta = (n_o - n_e)d_1 + (n_e - n_o)d_2 = (n_o - n_e)(d_1 - d_2)$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)(d_1 - d_2)$$

$(n_o - n_e)$ - табульовано;

$(d_1 - d_2)$ - вимірюємо; $\Delta\varphi$ - знаходимо



Компенсатор Солейля

195

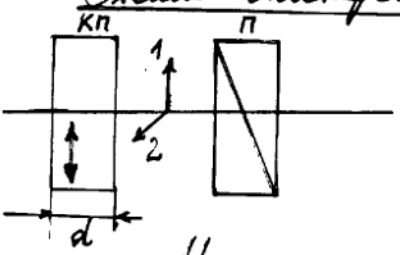
Інтерференція лінійно поляризованих хвиль

Якщо хвилі поляризовані ортогонально, то вони ніколи не можуть утворити інтерференційну картину.

Тобто: „е" та „о" промені, між якими виникає різниця фаз, не можуть інтерферувати між собою через те, що $\vec{E}_o \perp \vec{E}_e$, хоча $\Delta\varphi = \text{const}$.

Але набіг фаз між „е" та „о" променями в анізотр. кристалі, не змінюючи інтенсивність, впливає на поляризацію променя на виході. Зміну поляризації за допомогою аналізатора можна трансформувати в зміну інтенсивності.

Схема спостереження





Після виходу із КП промені втратили право наз. „е" та „о": стали 1 та 2

Напрямок коливань в двох променях, спочатку поляризованих у взаємно перпендикулярних напрямках, можна звести в одну площину за допомогою поляризатора, площина пропускання якого не співпадає з площиною коливань ні одного із променів.

Дослід показав, що: 1) якщо на КП падає природне світло, то вони на виході КП дають не когерентні промені (інтерферувати вони не можуть);

2) якщо на КП падає лін. поляр. світло, то промені 1 та 2 – когерентні.

Пояснення: ... див. Савельєв ... § 31 (с. 172)

196

Після КП світло буде еліптично-поляризованим. Форма і орієнтація еліпса залежить від товщини (d). Якщо КП в різних місцях має різну товщину, то для кожної з цих товщин (d_i) буде своя форма еліпсу. При цьому інтенсивність світла, що пройшло через КП в різних її місцях, – однакова. Але такий розподіл різко зміниться після проходження світлом поляризатора П. Цей поляризатор пропускає тільки ті складові променів 1 та 2, які співпадають з напрямком пропускання П.

Якщо світло, яке падає на КП, монохроматичне, то інтерф. картина після П складається із світлих і темних плям, які відповідають різним товщинам КП.

При обертанні П на 90° місце мінімумів займають max, і навпаки.

У білому світлі інтерф. картина буде кольоровою ($n(\lambda)$). При обертанні П на 90° кольори картини переходять у додаткові: черв→голубе; зелен→фіол.; синь→жовте.

Інтерференції не буде, якщо поляризація одного з променів (1 або 2) співпадає з площиною пропускання поляризатора П.

Якщо на КП направити неполяризоване світло або забрати поляризатор (аналізатор), то інтерф. карт. зникає.

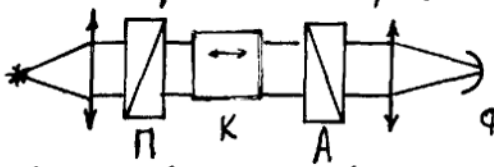
Якщо у якості екрана використати не амплітудно чутливу фотоплатівку, а середовище, чутливе до поляризації (ще краще до фази) хвилі, то інтерф. – без П!

197

Оптична активність

О. а. – природна (не штучна).
О. а. ≡ гіротропія.
О. а. ≡ обертання площини поляризації світла при проходженні світла крізь певні речовини.
Такі речовини наз. гіротропними, або природно активними. Їх гіротропні властивості пов'язані (визначаються) із структурою молекул або кристалічною структурою.
О. активними м.б. рідини, розчини і кристали.

Водний розчин цукору та кварц. Кварц – кристалічний (не плавлений). Кварц – анізотропний одновісний кристал і, разом з тим, оптично акт. кристал.



К – кварцева платівка
П ⊥ А
Без К на ФП – нуль.

Якщо в схему вставити К, то на ФП з'являється сигнал, який можна скомпенсувати (виміряти) аналізатором А.

$\Delta\varphi = \alpha_0 \cdot d$ α_0 – обертальна здатність.

Для кварцу $\alpha_0 = 21{,}7$ °/мм для $\lambda = 560$ нм
$\alpha_0 \sim \frac{1}{\lambda^2}$ – сильна залежність: $\Delta\varphi_{\text{жовт}} = 20°$
Кварц має дві модифікації: $\Delta\varphi_{\text{фіол.}} = 50°$
"правий кварц" та "лівий кварц"

О. а. рідини. Біо встановив, що $\varphi = [\alpha] \cdot d \cdot c$
$[\alpha]$ – стала обертання; c – концентрація розчину.
Для водних розчинів цукору при $t = 20°C$; $\lambda = 5893$ Å
$[\alpha] = 66.46°$

Оптична активність ~~анізотропних~~ обертальний випадок двопроменезаломлення. (Теорія Френеля)

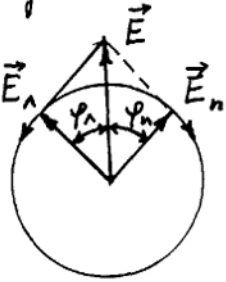
За Френелем існує $n_д$ та $n_Ω$ ($n_л$ та $n_п$)

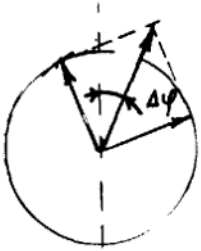
$\Delta n = n_п - n_л$ – різниця пок. заломлення для кругового (циркулярного) двопроменезаломлення.

Будь-яке лін. коливання можна представити у вигляді суми 2-х кругових коливань:

$$\left.\begin{aligned} E_x &= E_0 \cos\omega t \\ E_y &= E_0 \sin\omega t \end{aligned}\right\} \Rightarrow E_л = E_x + iE_y \quad \text{ліве обертання}$$

$$\left.\begin{aligned} E_x &= E_0 \cdot \cos\omega t \\ E_y &= -E_0 \sin\omega t \end{aligned}\right\} \Rightarrow E_п = E_x - iE_y \quad \text{праве обертання}$$





$|\vec{E}| = const$ – середовище не поглинає

$$\begin{cases} E_л = E_0 e^{i\omega t} \\ E_п = E_0 e^{-i(\omega t - \Delta\varphi)} \end{cases}$$

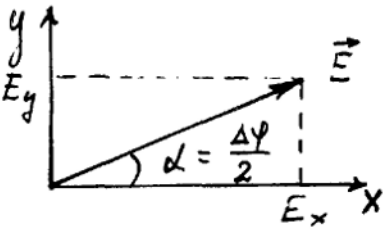
$n_л = n_п$
$v_л = v_п$
$\varphi_л = \varphi_п$

$n_л \neq n_п$ $(n_п < n_л)$
$v_п > v_л$
$\Delta\varphi = \varphi_п - \varphi_л$

$$E_л + E_п = E_0 e^{i\omega t} + E_0 e^{-i(\omega t - \Delta\varphi)} =$$

$$= e^{i\frac{\Delta\varphi}{2}} \cdot E_0 \left[e^{i(\omega t - \Delta\varphi/2)} + e^{-i(\omega t - \Delta\varphi/2)} \right] =$$

$$= 2E_0 e^{i\frac{\Delta\varphi}{2}} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\Delta\varphi}{2}\right)$$



$$\begin{cases} E_x = 2E_0 \cos\frac{\Delta\varphi}{2} \cos\left(\omega t - \frac{\Delta\varphi}{2}\right) \\ E_y = 2E_0 \sin\frac{\Delta\varphi}{2} \cos\left(\omega t - \frac{\Delta\varphi}{2}\right) \end{cases}$$

Кут повороту (α) залежить від різниці фаз ($\Delta\varphi$)

199

11.

Фаза „правої" хвилі $\varphi_п = \omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0} n_п \cdot d$

Фаза „лівої" хвилі $\varphi_л = \omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot n_л \cdot d$

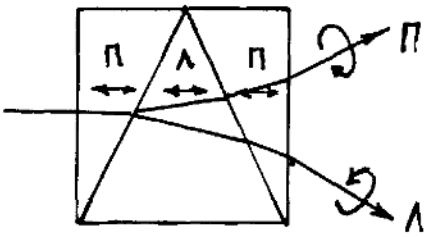
$$\Delta\varphi = \varphi_п - \varphi_л = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_л - n_п)d = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot c\left(\frac{1}{v_л} - \frac{1}{v_п}\right) \cdot d$$

$$\alpha = \frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{\pi}{\lambda_0}(n_л - n_п) \cdot d$$

Якщо $n_л > n_п \Rightarrow v_л < v_п$ — правий кристал

Якщо $n_л < n_п \Rightarrow v_л > v_п$ — лівий кристал

Френель перевірив своє припущення за допомогою досліду з призмою Френеля:



Складна призма із 3-х кусків кварцу (п-л-п).

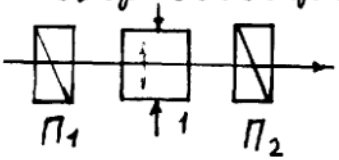
Оо' всіх 3-х кусків ⊥ основі призми, щоб не було природн. двопроменезаломл.

На границі I і II призм промінь роздвоюється через те, що $n_л \neq n_п$. Те ж саме на границі II і III призм.

На виході – 2 променя з лівою та правою цирк. поляризацією.

Штучна оптична анізотропія

Анізотропія при механічній напрузі (фотопружність)



1 - зразок (куб) з плавленого кварцу, органскла, ...

$n_o - n_e = k \cdot P$

k - стала Брюстера (константа речовини)

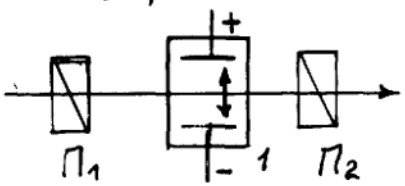
$P = F/S$ — тиск

Тиск (стискання або розтяг) м.б. двостороннім $\Rightarrow$ зразок стає оптично двовісним

Використовується для виявлення залишкових мех. напруг в прозорих тілах (кінескопи, лінзи тощо).

Для непрозорих конструкцій - моделювання з певним коефіцієнтом подібності.

Анізотропія в електричному полі (ефект Керра)



1 - Кювета з рідиною та ел. конденс.

Вкл. ел. поля призводить до появи сигналу в системі

$П_1 \perp П_2$

Оптична вісь напрямлена вздовж силових ліній ел. поля.

Є рідини з $n_e > n_o$; $n_e < n_o$; $n_e = n_o$ (ефекту Керра немає) - експеримент.

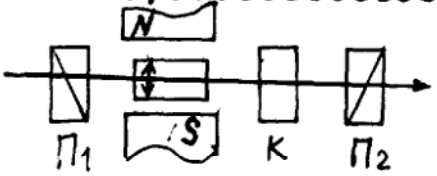
$$\Delta n = B \cdot \lambda \cdot E^2 \Rightarrow \Delta = l \cdot \Delta n \Rightarrow \Delta\varphi = k \cdot \Delta$$

Через те, що $\Delta n \sim E^2$, знак різниці фаз не залежить від напрямку ел. поля.

а) Для неполярних рідин (теорія Ланжевена) величина коеф. Керра $B > 0$. — додатній „квазікристал).

б) Для полярних рідин (теорія Борна, 1915 р.):
Диполі орієнтуються по полю: $\vec{P} = \alpha \vec{E}$
Для нітробензолу $B = 2.2 \cdot 10^{-5}$ CGSE ($B > 0$)
Для кювети з $l = 5$ см, $d = 1$ мм, $U = 1500$ В $\Rightarrow$
$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$! ($\frac{\lambda}{4}$ платівка!)
Час переключання для нітробензолу $\tau \sim 0.5 \cdot 10^{-11}$ с

Анізотропія в магнітному полі (ефект Коттона–Мутона)



К – компенсатор (для фіксування зсуву фаз)

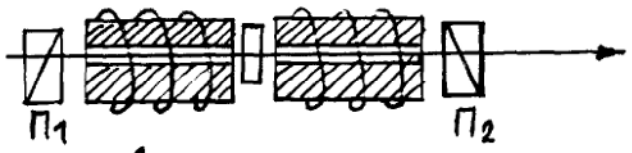
$$\Delta n = D \cdot B^2$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta n \cdot l = 2\pi C_0' \cdot l \cdot B^2$$

B – м. індукція; C_0' – стала Коттона–Мутона, яка залежить від природи речовини.
Для нітробензолу $C_0' = 2.25 \cdot 10^{-2}$ м$^{-1} \cdot$ Тл$^{-2}$.
Для $B = 1$ Тл та $l = 1$ м $\Rightarrow$ $\Delta\varphi = 0.14$ рад.

Ефект Фарадея (1846 р.)

В попередніх ефектах був індукований зсув фаз (ефект двопроменезаломлення). В ЕФ – обертання площини поляризації $\Delta\theta = V \cdot l \cdot B$



V – стала Верде;
l – довжина зразка;
B – індукція магнітного поля.

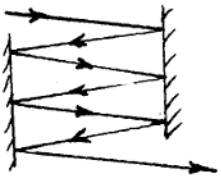
Є речовини з $V > 0$ (правообертаючі, або позитивні), додатні. Речовини з $V < 0$ – лівообертаючі (негативні), від'ємні.

Напрям обертання площини поляризації в ЕФ для кожної речовини визначається лише напрямом магнітного поля і не залежить від напряму світла.

Час запізнення (інерція ЕФ) – $\sim 10^{-9}$ с.

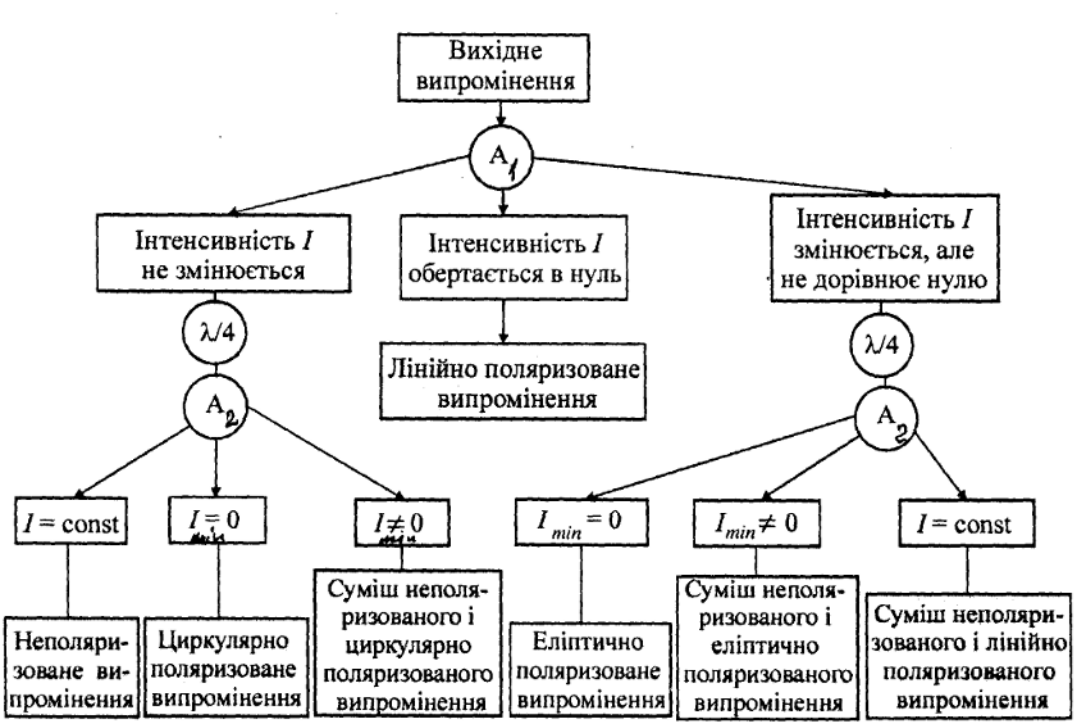
Підсилення ЕФ шляхом багаторазового проходження світлом робочого зразку:

Стала Верде $V \sim \frac{1}{\lambda^2}$



Для спец. сорту скла – важкого флінту $V = 0.08$ см$^{-1}$. Ерст

Схема аналізу стану поляризації світлового променя

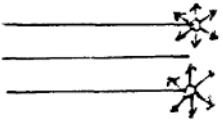


Розсіювання світла

Розсіювання світла в оптично неоднорідному середовищі

Оптично однорідне середовище – таке, для якого $n = \text{const}$ як у просторі, так і у часі. Для такого середовища р.с. не спостерігається.

При поширенні світла в опт. середовищі електр. поле хвилі викликає вимушені коливання оптичних електронів. ⇒ Ці електрони випромінюють ел.м. хвилі тієї ж частоти, що і частота падаючої хвилі.



Ці хвилі – вторинні. Якщо вони когерентні, то вони інтерферують. Єдиний напрям, в якому немає гасіння, це напрям падаючої хвилі. В цьому напрямі буде перевипромінюватись вторинна хвиля без гасіння і буде поширюватись хвиля.

Якщо в середовищі є неоднорідності (середовище – не гомогенне), то світло буде поширюватись у напрямах, відмінних від напряму поширення падаючої хвилі. Це і є розсіювання світла.

Неоднорідності середовища пов'язані із змінами показника заломлення.

Розподіл неоднорідностей розглядається як (неупорядкований) нерегулярний.

Види макроскопічних неоднорідностей: 1) тверді частинки в газі (дим); 2) рідина, в якій наявні краплинки іншої нерозчиненої рідини (емульсії); 3) тверді частинки в рідині (суспензії).

Такі середовища наз. каламутними (рос.: „мутные среды").

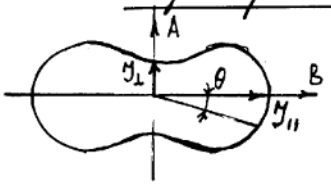
В цьому випадку відбувається дифракція на опт. неоднорідностях.

Ефекти розсіювання залежать від розмірів частинок:

I. Для $d < \lambda$ $(d \sim 0.1\lambda)$ – релеївське розсіювання. (Експериментально досліджів Тіндаль (1869 р.) та Релей (1899 р.)).

Властивості: 1) інтенс. розс. світла $I_{розс} \sim 1/\lambda^4$ – закон Релея; 2) $I_{розс.} \sim N$; 3) $I_{розс} \sim V_{част.}$; 4) $I_{розс} = f(T, °C)$.

Індикатриса розсіювання 5) розс. світло частково або повністю поляриз.



$$I_\theta = I_\perp (1 + \cos^2\theta)$$

Інт. світла, що пройшло через середовище з розсіюванням, в напрямку поширення падаючої хвилі в 2 рази більша за $I_\perp$:

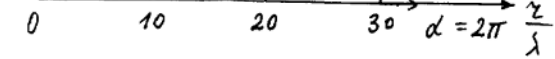
$$2I_\perp = I_\parallel$$

II. Для $d \gg \lambda$. Таке розсіювання пояснюється відбиттям, заломленням та дифракцією світла на цих частинках.

Властивості: 1) $I_{розс} \neq f(T, °C)$; 2) $I_{розс.} \neq f(\lambda)$; Тому туман має білий колір; 3) $I_{розс} \neq f(d)$

Внаслідок розсіювання світла оптично каламутними середовищами з такими частинками $(d \gg \lambda)$ інтенсивність $I_{розс.}$ зменшується за законом поглинання світла: $I_{розс} = I_0 \cdot e^{-2\pi N r^2 \cdot K x}$

N – кількість частинок в $1\,см^3$; r – радіус частинки; K – коефіцієнт, який залежить від відношення r/λ.



Залежність коеф. K від $\alpha = 2\pi \frac{r}{\lambda}$ практично зникає для $\alpha > 40$. При цьому зникає і залежність $I_{розс}$ від λ.

III. Для $d \sim \lambda$ – розсіювання Мі (дифракційне розсіюв.).

$\gamma_{розс} = f(\lambda)$; $\gamma_{розс.} \neq f(T, °C)$; $\gamma_{розс}$ – частково поляриз.

Молекулярне розсіювання світла

Р.с. спостерігається і в середовищах, в яких відсутні сторонні частинки.

Спочатку думали, що справа у забрудненості атмосфери. Але в горах небо ще синіше!?

Тоді таке Р.с. поясним оптичними неоднорідностями, пов'язаними із флуктуаціями. Останні пов'язані із тепловим рухом молекул і їх нерівномірним розподілом у просторі.

В малому об'ємі δ_0 випадково (завдяки тепл. руху молекул) зібралось $N_0 + \Delta N$ частинок, де N_0 – число частинок в тому * об'ємі δ_0 при ідеально рівномірному розподілу молекул в об'ємі ϑ_0. В результаті такого накопичення частинок об'єм δ_0 випромінює хвилю амплітуди $\vec{E}_0 + \vec{E}'$, де $\vec{E}_0$ – ампл. хвилі, що випромінює об'єм ϑ_0 з числом частинок N_0. На відміну від випадку абс. рівномірного розподілу частинок, в цьому випадку розсіювання не буде гаситись знищуватись інтерференцією ні в одному з напрямків. Напруженість поля світлової хвилі, розсіяної малим об'ємом δ_0, буде обумовлена полем $\vec{E}'$.

Об'єм, де відбуваються флуктуації, $\delta_0 \ll \lambda^3$. Тобто цей вид Р.с. відбувається за законами релеївського розсіювання.

В результаті теплова флуктуація призводить до того, що в деякому малому об'ємі δ_0 зібралось $N_0 + \Delta N$ частинок.

Відповідно до цього густина речовини $\rho = \rho_0 + \Delta\rho$

$\overline{\Delta\rho^2} = \frac{m^2 N_0}{V_0}$ – це відомо з молек. фізики.

$\overline{\Delta\rho^2}$ – абс. величина середнього значення квадрата флуктуації густини;

m – маса молекули; N_0 – середнє число молекул в одиниці об'єму речовини; V_0 – об'єм флуктуації.

$\Delta\rho \Rightarrow$ викликає ΔP – додатковий дипольний момент

$\Delta P = \Delta\varepsilon \cdot E \cdot V_0 \cdot \frac{1}{4\pi}$ (1) Це є джерелом випромінювання вторинних хвиль.

У класичній теорії ел.м. випромінювання доведено, що ампл. напруж. ел. поля E_0, яке випромінюється диполем, в точці, що знаходиться на відстані r від диполя, дорівнює:

(2) $E_0 = \frac{\omega^2 P_0}{c^2 \cdot r} \cdot \sin\theta$ де P_0 – ампл. коливань дип. момента

θ – кут між $\vec{P}$ та $\vec{r}$

E_θ – ампл. розсіяної хвилі, яка випромінюється об'ємом V_0 з флуктуацією $\Delta\varepsilon$ в напрямку θ.

(1) → (2) : $E_\theta = \frac{\omega^2 \cdot \Delta\varepsilon \cdot E_0 \cdot V_0}{c^2 \cdot r \cdot 4\pi} \cdot \sin\theta$

Інтенс. розсіяного світла:

$I_\theta = \frac{1}{2} \frac{c}{4\pi} \cdot E_\theta^2 \Rightarrow \boxed{I_\theta = \frac{c\omega^4 \cdot \Delta\varepsilon^2 \cdot E_0^2 \cdot V_0^2}{8\pi c^4 r^2 \cdot (4\pi)^2} \sin^2\theta} =$

E_0 – ампл. падаючої хвилі

$= \frac{c}{8\pi} \cdot E_0^2 \frac{V_0^2}{(4\pi r)^2} \cdot \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4 \cdot \Delta\varepsilon^2 \cdot \sin^2\theta = I_0 \frac{\pi^2}{\lambda^4} \cdot \frac{1}{r^2} V_0^2 \cdot \Delta\varepsilon^2 \cdot \sin^2\theta$

Інтенс. розсіяного світла в об'ємі V дорівнює

$I_{розс} = \frac{V}{V_0} \cdot I_\theta = I_0 \frac{\pi^2}{\lambda^4} \cdot \frac{1}{r^2} V_0 \cdot V \cdot \Delta\varepsilon^2 \cdot \sin^2\theta$

Через те, що $\varepsilon - 1 = c \cdot \rho \Rightarrow \Delta\varepsilon = c \cdot \Delta\rho = c \cdot \rho \cdot \frac{\Delta\rho}{\rho} = (\varepsilon - 1)\delta$

$\delta = \frac{\Delta\rho}{\rho}$

$\Delta\varepsilon^2 = (\varepsilon-1)^2 \cdot \delta^2$

Для ідеального газу $\delta^2 = \frac{1}{N \cdot v_0}$

Тоді $I_{розс.} = I_0 \frac{\pi^2}{\lambda^4} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot v_0^2 (\varepsilon-1)^2 \frac{1}{N \cdot v_0} \cdot \sin^2\theta =$

$= \boxed{I_0 \frac{\pi^2}{\lambda^4} \cdot \frac{1}{r^2} \frac{v_0}{N} (\varepsilon-1)^2 \sin^2\theta}$ формула Релея

$\varepsilon - 1 = n^2 - 1 = (n-1)(n+1) = 2(n-1)$

$\uparrow n \approx 1$ для газу

Тому $I_{розс} = I_0 \frac{4\pi^2}{\lambda^4} \cdot \frac{1}{r^2} (n-1)^2 \frac{v_0}{N} \cdot \sin^2\theta$ Формула Релея

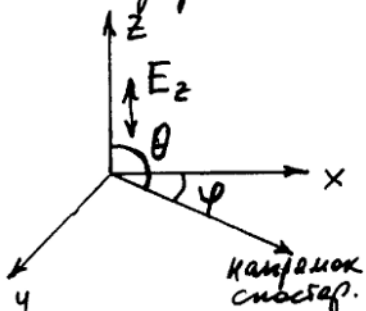
Для ідеального газу $\overline{\Delta N^2} = N$

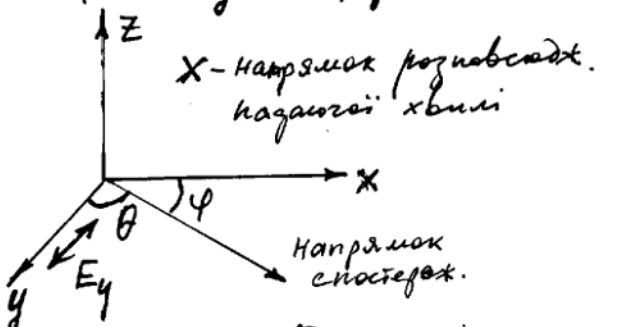
Через те, що $\varepsilon - 1 = n^2 - 1 \sim N$, то $I_{розс} \sim \frac{N^2}{N} = N$

Для природного світла:

Розкладаємо на 2 компоненти із ортогональними складовими: E_z ($\perp$ пл. падін.) та E_y (в пл. падіння):

$I_{прир} = I_z + I_y$ $\left(I_z = I_y = I_{прир} \cdot \frac{1}{2}\right)$.





$$\boxed{I_\varphi = I_0 \frac{2\pi^2}{r^2 \lambda^4} (n-1)^2 \frac{v_0}{N} (1+\cos^2\varphi)}$$

Полярна діаграма розподілу інтенсивн. розсіяного світла

φ - кут розсіювання (кут між напрямом спостереження і напрямом розповсюдження).

Висновки:

1) Колір неба пояснюється тільки молекул. Р.с.

2) Вимірювання $J_{розс}$ дало можливість за формулою Релея визначити число молекул в од. об'єму: $N_1 = \frac{N}{V_0}$ та число Авогадро.

3) Формула Релея перестає бути справедливою, якщо розміри розсіюючих частинок стають $> \frac{\lambda}{20}$. В цьому випадку: а) $J_{розс} \sim \frac{1}{\lambda^2}$; б) розс. світло - частково поляриз.; в) індикатриса стає несиметричною відносно OX; г) індикатриса стає $\perp$ до OX.

4) Розглянута теорія справедлива для ізотропних середовищ. Анізотропія молекул призводить до того, що в речовині виникають флуктуації орієнтації, які викликають деполяризацію розсіяного світла.

5) В критичному стані спостерігається так флуктуації. Величина V_0 при цьому сильно збільшується і стає більшою за λ: $V_{0кр} > \lambda$. Таке середовище стає каламутним і непрозорим для падаючого світла, дуже сильно розсіює світло всього діапазону спектра. Це розсіювання наз. опалесценцією.

Розсіювання Мандельштама – Бріллюена

При релеївському і при молекулярному Р.с. частота розсіяного світла не змінюється. Але є такі види Р.с., за яких ω змінюється. До них належить Р.М.-Б. Воно спостерігається в оптичному середовищі, в якому поширюються акустичні хвилі – відбувається так зване розсіювання на фононах. Акуст. хвилі створюють неоднорідності густини, на яких і відбувається розсіювання світла.

Акуст. хвилі: $A = A_0 \cos(\Omega t - qx)$, де $q = \frac{2\pi}{\Lambda}$

Зміна числа молекул в од. об'єму $\Delta N = N_0 \cos(\Omega t - qx)$

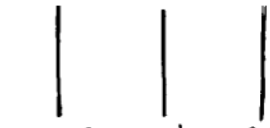
Світлові хвилі: $E = E_0 \cos(\omega t - kx)$, де $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

$$\vec{P} \sim N \cdot \vec{E} = (N_0 + \Delta N)\vec{E} = \underbrace{N_0 E_0 \cos(\omega t - kx)}_{\text{релеївська хв.}} + \frac{1}{2} E_0 \cdot \Delta N \cdot \cos(\omega_1 t - k_1 x) + \frac{1}{2} E_0 \cdot \Delta N \cos(\omega_2 t - k_2 x)$$

де $\omega_1 = \omega + \Omega$ $\quad \omega_2 = \omega - \Omega$

$k_1 = k + q$ $\quad k_2 = k - q$

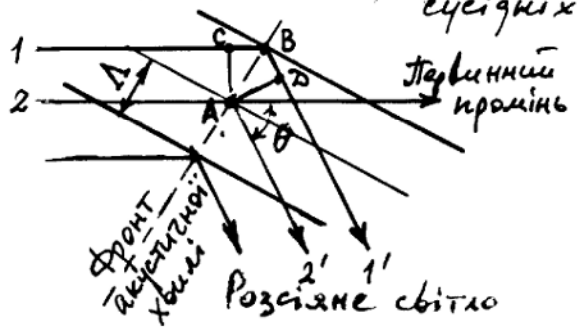
Тонка структура релеївської лінії



Для того, щоб розсіяні хвилі інтерферували і давали max інтенсивності в напрямі, який утворює кут θ з напрямом падаючої хвилі, необхідно, щоб опт. різниця ходу $\Delta = CB + BD$ сусідніх падаючих (1,2) і розсіяних (1', 2') променів дорівнювала би

$$\Delta = 2n \cdot \Lambda \sin\frac{\theta}{2} = \lambda$$

де $\Lambda = AB$ – довжина розсіяної пружної хвилі.



8

Розсіювання М.-Б. еквівалентне модуляції світла падаючого променя з частотою пружної хвилі

$$\Lambda = v\frac{1}{\Delta\nu}\ ; \qquad \lambda = c\frac{1}{\nu}$$

$$\Delta = 2n\frac{v}{\Delta\nu}\cdot\sin\frac{\theta}{2} = c\frac{1}{\nu} \Rightarrow \frac{\Delta\nu}{\nu} = 2n\frac{v}{c}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Omega}{\omega}\ ;$$

$$\boxed{\frac{\Omega}{\omega} = 2n\frac{v}{c}\sin\frac{\theta}{2}}$$ Формула Мандельштама-Бріллюена

Зауваження:

1. Ситуація ускладнюється тим, що в кристалах у кожному напрямку може розповсюджуватись три акустичних хвилі (1-поздовжня і 2-поперечних). У тому ж напрямку може поширюватись дві світл. хвилі, поляризовані в перпендик. напрямках. Тому в розсіяному світлі – 24 компоненти (6 груп по 4 лінії), але роздільної сили спектр. приладів вистачає, щоб розрізнити тільки 6 зміщених компонент.
2. Р.с. М.-Б. можливе також і на інших колективних збудженнях: магнонах, екситонах, дефектах крист. ґратки, поляронах, плазмонах тощо.
3. Р.с. М.-Б. відноситься до ефектів лінійної оптики.
4. Під дією потужного лазерного випром. на середовище в ньому може виникнути вимушене М.-Б. розс. світла, яке використовується для генерації потужних гіпер-звук. хвиль у кристалах. Інтенс. розсіяного світла в цьому випадку може бути рівною інтенс. падаючого світла.
5. Якщо частота падаючого світла ≈ власній частоті поглинання речовини, то спектр. резонансне Р.с. М.-Б.

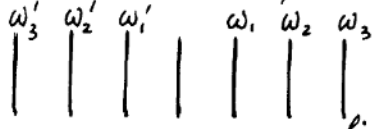
211

Комбінаційне розсіювання світла. (Ефект Рамана).

КР виникає в результаті модуляції опт. хвилі власними коливаннями молекул.

1928 р.: Мандельштам та Ландсберг на $CaCO_3$ та кварці, Раман та Кришнан – на рідинах (бензол, толуол).

Експеримент: кожна спектр. лінія супроводжується виникненням системи додаткових ліній, які називаються супутниками (сателітами) із значно більшими значеннями частоти, ніж компоненти М.-Б.



$\omega_1 = \omega_0 - \Omega_1$
$\omega_2 = \omega_0 - \Omega_2$
$\omega_3 = \omega_0 - \Omega_3$
} стоксові компон.

$\omega_1' = \omega_0 + \Omega_1$
$\omega_2' = \omega_0 + \Omega_2$
$\omega_3' = \omega_0 + \Omega_3$
} анти-стокс. компоненти

Властивості:

1. Супутники супроводжують кожну лінію первинного світла. При переході від однієї спектр. лінії первинного променя до другої сукупність значень $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \ldots$ залишається для певної величини незмінною.
2. Кожному сателіту з частотою ω_i^s відповідає сателіт із частотою ω_i^{as}; $\Omega_i = \omega_0 - \omega_i^s = \omega_i^{as} - \omega_0$.
3. Частоти Ω_i лежать в ІЧ діапазоні і відповідають частотам коливань молекул.

Механізм КР →

КР виникає в результаті модуляції опт. хвилі власними коливаннями молекул.

На молекулу, яка має власну частоту коливань (л) падає опт. хвиля $E = E_0 e^{i\omega t}$. У молекулі

212

виникає дип. момент $p(\omega') = \alpha \cdot E(\omega)$, де α – коеф. поляризації молекули.

Вважаємо, що ω попадає в обл. прозорості середовища. Тоді α – дійсна величина.

Зв'язок між атомами, які складають молекулу, зумовлений електронами. Електронна поляризація спричиняє збурення сил зв'язку, в рез-ті чого відбуваються збудження коливань атомів молекули. Будемо вважати, що $\alpha = \alpha_0(1 + A\cos\Omega t)$

$$p(\omega') = \alpha_0(1 + A\cos\Omega t)\cdot E_0 e^{i\omega t} =$$

$$= \alpha_0 E_0 e^{i\omega t} + \frac{1}{2}\alpha_0 A E_0 e^{i(\omega+\Omega)t} + \frac{1}{2}\alpha_0 A E_0 e^{i(\omega-\Omega)t}$$

↑ скористались формулою Ейлера: $\cos\Omega t = \frac{1}{2}(e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t})$

I доданок описує релеївське Р.е;

II та III доданки описують КР.

Модуляція за рахунок коливань молекул.

Якщо падає на середовище монохром. світло, то в спектрі розсіяного світла спостер. три лінії:

1) основна (на частоті ω первинного світла);
2) стоксова компонента (на частоті $\omega - \Omega$, утворюється за рахунок втрати енергії квантом падаючої хвилі);
3) антистоксова компонента (утворюється за рахунок збільшення енергії кванта падаючого випром.).

Стоксова і антистоксова компоненти мають різні інтенсивності. Різниця в інтенсивностях залежить від температури. Пояснення – квантовомеханічне.

(4.) Спектр КР - характеристика речовини. За спектрами КР можна проводити структурні і аналітичні дослідження.

(5.) Інтенсивності стоксової і антистокс. компонент у спектрі КР становлять 10^{-5} - 10^{-6} від інтенсивності збуджуючої лінії. Крім того, вони спостерігаються на порівняно сильному суцільному (не дискретному) фоні релеївського Р.с. та люмінесценції.

(6.) При дії на середовище потужного оптичного випромінювання (гігантського лазерного імпульсу) виникає нелінійне явище - вимушене КР (ВКР).

Оптичні явища, зумовлені розсіюванням світла в атмосфері (денне світло, райдуга, гало, вінці

Тема виноситься на самостійну проробку

Кучерук, Горбачук ... с. 219 - 222.

§ 7.4. Оптичні явища, зумовлені розсіянням світла в атмосфері (денне світло, райдуга, гало, вінці)

Внаслідок розсіяння світла атмосфера світиться в усіх напрямах, створюючи *денне світло*, яке освітлює земну поверхню і всі предмети. Оскільки інтенсивність розсіяного світла чистою атмосферою обернено пропорційна четвертому степеню довжини світлових хвиль, то небо має голубий колір. За наявності в атмосфері завислих водних краплин та пилу розсіяння світла відбувається рівномірніше в усіх частинах спектра і колір неба стає менш голубим, тобто білястим. Розсіяння світла атмосферою є причиною плавного переходу від дня до ночі і навпаки. При опусканні Сонця за горизонт атмосфера освітлюється все менше і настає момент, коли вона зовсім не освітлюється. Проміжок часу між цим моментом і заходом Сонця являє собою присмерки.

До оптичних явищ, зумовлених розсіянням світла в атмосфері, належить *райдуга*. Це кольорова смуга у вигляді дуги, що спостерігається на фоні дощових хмар або дощу, коли дощова хмара знаходиться попереду спостерігача, а Сонце – позаду. Центр дуги райдуги знаходиться на продовженні прямої, що проходить через око спостерігача і Сонце. Кут між цією прямою і напрямом від спостерігача до дуги райдуги має значення 41–42° (приклад 7.1). Різнокольорова дуга знаходиться від спостерігача на відстані 1–2 км, її можна також спостерігати на відстані 2–3 м на фоні водяних краплин фонтанів. Часто виникає побічна райдуга, концентрична до першої, із оберненим розміщенням кольорів. Її кутовий радіус має значення близько 52°. Вигляд дуги, яскравість кольорів та ширина смуг залежать від розмірів краплин води та їхньої кількості: більші краплини створюють вужчу райдугу з різко виділеними кольорами.

Виникнення райдуги Р. Декарт у 1637 р. пояснював заломленням і відбиванням світла в дощових краплинах. Утворення кольорів та їх послідовність пояснено після встановлення складної природи білого світла та його дисперсії в середовищах. Іноді одночасно спостерігається три, чотири і навіть п'ять райдуг. Вони можуть виникати не тільки від прямих сонячних променів, але й внаслідок дії відбитих. Райдугу можна спостерігати також і вночі після дощу, коли із-за хмар виходить Місяць. У цьому випадку вона буде білою, оскільки нічним зором кольори не розрізняються.

Нерідко спостерігають оптичне явище, яке називається *гало*. Ця назва об'єднує групу складних оптичних явищ в атмосфері, зумовлених заломленням і відбиванням світла в кристалах льоду пір'ястих хмар. Кристали, з яких складаються хмари, являють собою тонкі шестикутні пластинки-сніжинки або правильні шестигранні призми. Іноді пластинки та призми з'єднуються, тоді кристали мають форму парашутиків.

Оскільки кут між двома гранями шестигранної призми дорівнює 60°, а показник заломлення льоду для світлових хвиль, яким відповідає зеле-

215

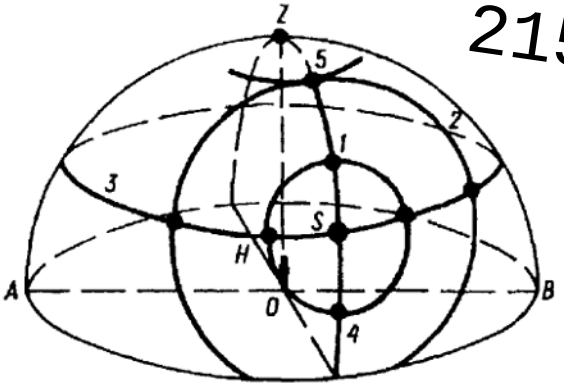


Рис. 7.5

ний колір, $n = 1{,}31$, то за допомогою формули (2.11) знаходимо, що кут найменшого відхилення променя дорівнює 22°.

На рис. 7.5 показано загальну картину гало. У центрі небосхилу O, який зображено у вигляді півсфери, знаходиться спостерігач. Точки Z і S вказують розміщення відповідно зеніту і Сонця для спостерігача, відрізок AB – лінію горизонту. В загальному випадку можна спостерігати такі явища. Малий круг гало *1*, центр якого збігається з центром видимого розміщення Сонця; його кутовий радіус дорівнює 22°. Великий круг гало *2* і круг *1* концентричні, круг гало *2* має кутовий радіус 46°. Світлий круг *3* паралельний горизонту і проходить через видиме розташування Сонця. Кільце *4* розміщене у вертикальній площині й також проходить через видиме розташування Сонця. Круги *3* і *4* утворюють стовпи, які за формою подібні до хрестів. Вертикальні стовпи утворюються внаслідок відбивання і заломлення світла в горизонтально розміщених кристалах, які повільно падають і обертаються навколо горизонтальної осі.

Коли значна кількість кристаликів льоду у вигляді парашутиків повільно опускається, то у разі низького розміщення Сонця над горизонтом сонячні промені, заломлені гранями шестигранних призм, потрапляють в око під кутом 22° до напряму на Сонце і створюють вертикальні стовпи з обох боків від Сонця. Ці стовпи в перетині з кругом *3* з обох боків Сонця утворюють два несправжніх Сонця.

Іноді тихим морозним ранком можна спостерігати над яскравим Сонцем, що піднімається над горизонтом, льодяні голки, що поблискують в його промінні, а зверху і знизу від Сонця – світні стовпи. Ці стовпи самі по собі кольору не мають, але коли Сонце стає жовтим, оранжевим або червоним, вони набирають того самого відтінку.

Навколо Сонця або Місяця можна спостерігати одне або кілька райдужних кілець, які називаються *вінцями*. Центр вінців збігається з центром світила, навколо якого вони виникають. Утворення вінців зумовлене дифракцією світла на водяних краплинах прозорих хмар, які знаходяться між світилом і спостерігачем. Не слід змішувати вінці з гало. Кутовий діаметр вінців значно менший від діаметра гало і становить 1–6°.

До оптичних явищ належить також мерехтіння зірок. Воно зумовлене випадковими змінами густини середовища, що приводить до зміни його показника заломлення.

Від зірки до Землі поширюється плоска світлова хвиля (промені паралельні). Внаслідок випадкових змін густини атмосфери Землі відбуваються

216

відповідні зміни її показника заломлення. Це приводить до зміни форми фронту хвилі (рис. 7.6). Оскільки промені нормальні до фронту, то в місцях виступів вони розходяться й яскравість цих ділянок зменшується, а в місцях впадин промені сходяться і яскравість відповідно збільшується. Оскільки зміни показника заломлення в атмосфері мають випадковий характер, то спостерігається мерехтіння зірок. Це явище характерне тільки для зірок, оскільки їх можна побачити у вигляді світних точок під кутом не більшим 0,05″. Планети не мерехтять, так як видно їх під кутом десятків кутових секунд. Тому світло від ділянок хвильового фронту, яким відповідає менша інтенсивність світла, буде перекриватись світловим потоком від ділянок хвильового фронту, яким відповідає більша інтенсивність світла.

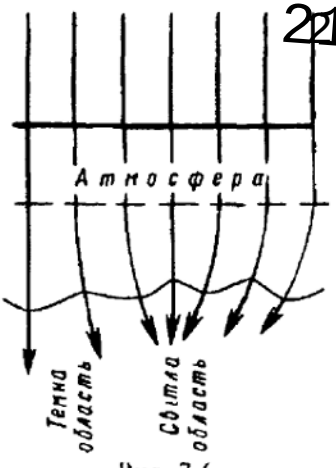


Рис. 7 6

Приклад 7.1. Показати, що кут між прямою, яка проходить через око спостерігача і Сонце, та напрямом від спостерігача до зовнішньої поверхні дуги райдуги має значення 42°.

Розв'язання. Розглянемо хід променів від Сонця через краплину води. Сонячний промінь, який падає на краплину в точці A під кутом i, заломлюється на поверхні краплини під кутом r, потім відбивається в точці B і знову заломлюється в точці D, виходячи з краплини під кутом i (рис. 7.7). Із трикутника ABC можна записати $r = (i - r) + \gamma/2$, звідки

$$\gamma = 4r - 2i . \qquad (1)$$

Тоді кут відхилення променя ε дощовою краплиною дорівнює

$$\varepsilon = \pi - \gamma = \pi - 4r + 2i . \qquad (2)$$

Проведемо дослідження (2) на екстремум

$$\frac{d\varepsilon}{di} = 4\frac{dr}{di} + 2 \quad 0 . \qquad (3)$$

Шляхом диференціювання співвідношення $\sin i = n \sin r$ одержимо

$$\frac{dr}{di} = \frac{\cos i}{n \cos r} = \sqrt{\frac{1 - \sin^2 i}{n^2 - \sin^2 i}} \qquad (4)$$

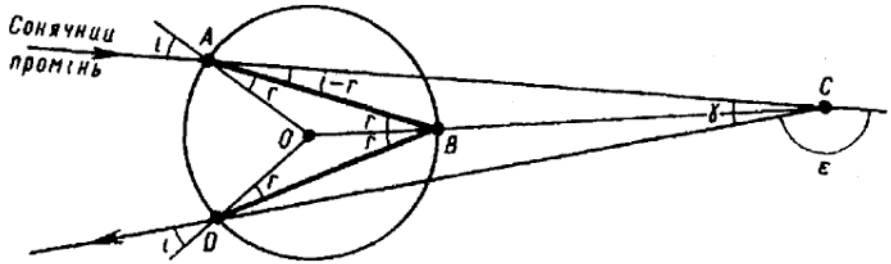


Рис. 7.7

Підставимо (4) у (3)

$$\frac{d\varepsilon}{di} = -4\sqrt{\frac{1-\sin^2 i}{n^2-\sin^2 i}} + 2 = 0 .$$

Для $n = 1{,}33$ маємо

$$\sin i = \sqrt{\frac{4-n^2}{3}} = 0{,}86; \quad i \approx 60^\circ, \quad \text{а} \quad r \approx 40^\circ 30' .$$

Підставимо ці значення в рівняння (2). Тоді

$$\varepsilon = 180^\circ - 162^\circ + 120^\circ = 138^\circ , \text{ а } \gamma = 42^\circ .$$

Під кутом 42° промені зазнають найменшого відхилення, тому найбільша інтенсивність буде спостерігатись для цього кута. Отже, кут між лінією, яка проходить від Сонця через око спостерігача, і променем, що виходить із краплини і потрапляє в око, дорівнює 42°.

Внаслідок дисперсії показника заломлення води червоні промені будуть відхилятися менше ніж фіолетові. Тому райдуга є дугою, розкладеною в спектр, внутрішня сторона якої має фіолетовий колір, а зовнішня – червоний.

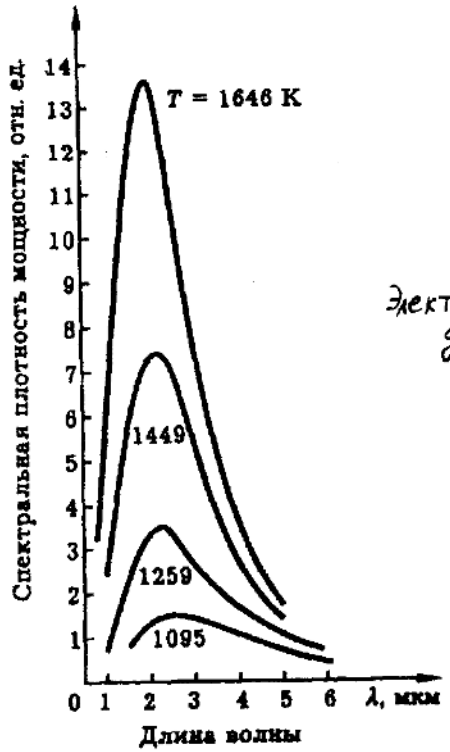
Теплове випромінювання

Т.в. – це світло (не обов'язково – видиме, і в основному – невидиме людським оком), яке випромінюється нагрітим тілом (сонячне світло, полум'я свічки, ІЧ випромінювання тіла людини, паяльника, світло і тепло від лампи розжарювання, ел. дуги тощо).

Основні експериментальні факти:

1) Нагріті тіла світяться. Яскравість світіння збільшується із збільшенням температури (Т). Від Т залежить і колір світла, що випромінюється.

2) Світло від нагрітого тіла має широкий, суцільний спектр.





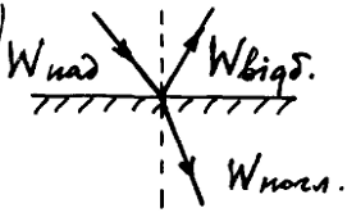
Люммер та Прингегейм, 1899 р.

Потужність теплового випромінювання вимірюють, наприклад, за допомогою термопари або болометра

Поглинальна здатність тіла

Поглин. здатність $\alpha = \dfrac{dW_{погл.}(\nu, \nu+d\nu)}{dW_{пад.}(\nu, \nu+d\nu)}$

W - енергія світл. потоку

1) α – безрозмірна величина
2) $0 \le \alpha \le 1$
3) $\alpha = \alpha(\nu, T)$
4) У різних тіл функції $\alpha(\nu, T)$ – різні
5) Коли $\alpha = 0$ – „абс. біле тіло"
   Коли $\alpha = 1$ – „абс. чорне тіло" (а.ч.т.)
6) 

$W_{пад.} = W_{погл.} + W_{відб.}$

Абсолютно чорне тіло

А.ч.т. – тіло, здатне поглинати все падаюче на нього випромінювання довільної λ при довільній температурі (T).

Для а.ч.т. $\alpha(\nu, T) = 1$ для довільних ν та T.

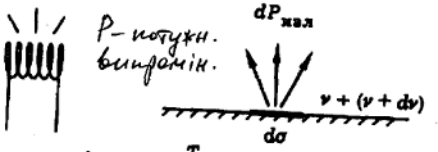
В природі а.ч.т. не існує. А.ч.т. – ідеалізація, але можна знайти дуже близькі за своїми властивостями до а.ч.т. тіла: сажа, чорний оксамит, коруваті тіла. В основі – багаторазове відбиття, яке



забезпечує сильні поглинаючі властивості. Маленький отвір в корожинці з ідеально відбиваючими поверхнями, які не прозорі для ел.м. випромінювання. На виході випромінювання має майже нульову потужність.

220

Випромінювальна здатність тіл

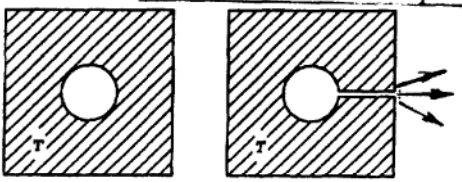


$$dP_{випр.} \sim d\nu \} \Rightarrow$$
$$dP_{випр} \sim d\sigma \}$$
$$dP_{випр} = \varepsilon \cdot d\nu \cdot d\sigma$$

ε – випромінювальна здатність тіла.

Дослід показує, що $\varepsilon = \varepsilon(\nu, T)$ (як і поглинальна здатність). Але $\varepsilon(\nu, T)$ – розмірна величина (на відміну від $\alpha(\nu, T)$): $[\varepsilon] = Вт \cdot с / см^2$.

Рівноважне теплове випромінювання



в стаціонарних умовах, коли T тіла підтримується постійною, в порожнині (рос. „полость") характеристики теплового випром. знаходяться в рівновазі із нагрітим тілом (самою порожниною, в даному випадку). Рівноважне теплове випромінювання – таке, що знаходиться в тепловій рівновазі з нагрітим тілом. Отвір зроблений для вимірювання х-ик випромінювання.

Порушення рівноважного стану означає, що тіло почнає нагріватись або охолоджуватись.

Закон Кірхгофа

В 1859 р. Кірхгоф встановив, що в стані теплової рівноваги відношення $\frac{\varepsilon(\nu, T)}{\alpha(\nu, T)}$ не залежить від природи тіла:

Закон Кірхгофа

$$\frac{\varepsilon(\nu, T)}{\alpha(\nu, T)} = f(\nu, T) = inv$$

221

4

$\rho(\nu, T)$ – універсальна (однакова для всіх тіл) функція частоти (ν) та температури (T).

$\rho(\nu, T)$ – випромінювальна здатність а.ч.т.

Це витікає з того, що для а.ч.т. $\alpha(\nu, T) = 1$.

Значить $\rho(\nu, T) = \varepsilon(\nu, T)$ для а.ч.т.

Закон Кірхгофа, виведений спочатку із уявлень т/дин. теоретично, потім підтверджений експериментально.

Уявний експеримент, що демонструє справедли-